

MATHHX A

Benjamin Teglbjærg

13. august 2026

Indhold

1	Integralregning	5
1.1	Stamfunktioner	5
1.2	Ubestemte integraler	11
1.3	Bestemte integraler	14
1.4	Integration ved substitution	21
1.5	Arealbestemmelse	28
1.6	Integraler i GeoGebra	53
1.7	Beviser - Integralregning	62
2	Differentialligninger	80
2.1	Introduktion til differentialligninger	80
2.2	Bestemmelse af løsninger	86
2.3	Separation af de variable	92
2.4	Linjeelementer og retningsfelter	104
2.5	Differentialligninger i GeoGebra	115
2.6	Anvendelse af differentialligninger	120
2.7	Beviser - Differentialligninger	123
3	Lineær programmering	127
3.1	Lineær programmering med hjørneinspektion	128
3.2	Lineær programmering med niveaulinjer	136

3.3	Teori for lineær programmering	147
3.4	Lineær programmering uden computer	155
3.5	Følsomhedsanalyse (A)	161
3.6	Beviser til lineær programmering	167
4	Kvadratisk programmering	169
4.1	Introduktion til kvadratisk programmering	169
4.2	Kvadratisk programmering når c er nul	174
4.3	Kvadratisk programmering når a og c har samme fortegn	181
4.4	Kvadratkomplettering	187
4.5	Parabler	192
4.6	Cirkler	194
4.7	Ellipser	200
4.8	Mere om niveaukurver og frie ekstrema	205
4.9	Beviser til kvadratisk programmering	215
5	Regressionsanalyse	224
5.1	Lineære modeller	224
5.2	Regression i Analysis Toolpak	227
5.3	Multipel lineær regression	233
5.4	Modelkontrol	238
5.5	Guide til fancy lineær regression	245
5.6	Ekstrema for funktioner af to variable	247
5.7	Regression ved beregning	252
5.8	Determinationskoefficienten	260
6	Trigonometriske funktioner (2017-ordning)	269
6.1	Enhedscirklen (2017-ordning)	270
6.2	Cosinus, sinus og tangens (2017-ordning)	276
6.3	Regning med trigonometriske funktioner (2017-ordning)	283
6.4	Beviser - Trigonometriske funktioner (2017-ordning) . .	294
6.5	Trigonometriske funktioner i fysik (2017-ordning) . . .	298

7	Vektorer (2017-ordning)	318
7.1	Introduktion til vektorer (2017-ordning)	319
7.2	Koordinater for vektorer (2017-ordning)	328
7.3	Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer (2017-ordning)	334
7.4	Tværvektor og arealer (2017-ordning)	343
7.5	Beviser - Vektorer (2017-ordning)	347
8	Trigonometriske funktioner	355
9	Potensfunktioner (S)	356
9.1	Forskrift og graf	356
9.2	Potensfunktioners vækst	363
9.3	Beviser til potensfunktioner	367
10	Trigonometriske funktioner - udvidet (S)	369
10.1	Enhedscirklen	370
10.2	Cosinus, sinus og tangens	377
10.3	Harmoniske svingninger	385
10.4	Beviser - Trigonometriske funktioner	395
11	Trigonometri (S)	403
11.1	Vinkler og trekanter	403
11.2	Retvinklede trekanter	413
11.3	Vilkårlige trekanter	425
11.4	Beviser - Trigonometri	436
12	Vektorer (S)	440
12.1	Introduktion til vektorer	440
12.2	Koordinater for vektorer	450
12.3	Skalarprodukt	458
12.4	Beviser - Vektorer	469
	Løsninger til opgaver	474

Kapitel 1

Integralregning

Integralregning er tæt knyttet til differentialregning. I første omgang vil emnet handle om at bestemme forskrifter for funktioner ud fra kendskab til deres differentialkvotient, men senere vil vi se, at integralregning også kan bruges til at finde arealer under kurver, hvilket er overraskende nyttigt – også indenfor økonomi. F.eks. kan man beregne Gini-koefficienter med integralregning.

Udover at være nyttigt i sig selv, er integralregning også en forudsætning for mange andre vigtige emner som f.eks. differentiaalligninger.

1.1 Stamfunktioner

Definition 1.1.1

Lad f være en funktion. En *stamfunktion* til f er en funktion F , som opfylder

$$F'(x) = f(x)$$

En stamfunktion til f er altså en funktion som giver f , når man differentiere den.

Eksempel 1.1.1

Funktionen $F(x) = x^2$ er en stamfunktion til funktionen $f(x) = 2x$, fordi

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Øvelse 1.1.1

Undersøg:

- a) Er $F(x) = 4x$ en stamfunktion til $f(x) = 4$?
- b) Er $F(x) = 2x^6$ en stamfunktion til $f(x) = 4x^5$?

Eksempel 1.1.2

Vi vil bestemme en stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + 1$. Vi skal altså finde et udtryk, som giver $3x^2 + 1$ når man differentiere det.

Vi husker fra differentialregning, at x^3 differentieret giver $3x^2$, og at x differentieret giver 1. Derfor gætter vi på at svaret er $F(x) = x^3 + x$. Vi tester:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Den var god nok.

Der er regler til at finde stamfunktioner (for simple funktioner), men ofte kan man tænke sig frem til stamfunktionen, ud fra den viden man har fra differentialregning.

Eksempel 1.1.3

Vi vil bestemme en stamfunktion til $f(x) = x^4$.

Vi leder først efter noget som giver x^4 , når man differentiere det. Vi prøver x^5 , fordi vi kan huske at man trækker en fra eksponenten, når man differentiere en potensfunktion. Men x^5 differentieret giver $5x^4$, og det var ikke helt det vi skulle have. Vi kan dog reparere på det ved at gange med $\frac{1}{5}$, så vi får

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5.$$

Vi tester vores svar:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{5} \cdot 5x^4 \\ &= x^4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Den var god nok.

Øvelse 1.1.2

Bestem en stamfunktion til følgende funktioner

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 - x^5 + 2$

Metoden vi lige har brugt virker kun for simple funktioner, hvor man hurtigt kan gennemskue hvad stamfunktionen må være. Det viser sig, at det generelt er sværere at bestemme stamfunktioner, end det er at differentiere. Er funktionen simpel er det dog nemt nok. Man slår bare stamfunktionen op i en tabel.

Eksempel 1.1.4

Vi vil bestemme en stamfunktion til $f(x) = \ln(x)$, men vi kan ikke lige komme i tanke om noget som giver $\ln(x)$ når man differentiere det. Vi åbner formelsamlingen, finder en tabel over stamfunktioner og ser at stamfunktionen er

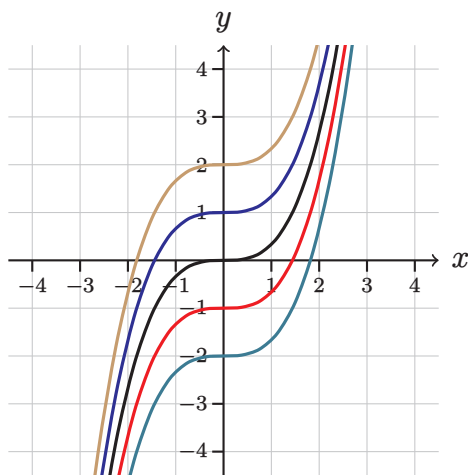
$$F(x) = x \ln(x) - x.$$

Øvelse 1.1.3

Lad $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Bestem en stamfunktion til f .

I eksempel 1.1.1 så vi at $F(x) = x^2$ var en stamfunktion til $f(x) = 2x$, men det er ikke den eneste stamfunktion. Vi kunne i stedet vælge f.eks. $F(x) = x^2 + 1$, eller hvad med $F(x) = x^2 + 27$? Hvis man differentiere dem, så får man også f . Helt generelt gælder der, at hvis F er en stamfunktion til f , så er $F(x) + c$, hvor c er en konstant, også en stamfunktion til f . Der findes dog ikke andre stamfunktioner til f end dem på formen $F(x) + c$, og det betyder at vi kan fastlægge en stamfunktion ved at kræve, at dens graf skal gå igennem et punkt.



Stamfunktioner for $f(x) = x^2$. Vi har $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ med $c = -2$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$.

Eksempel 1.1.5

Lad $f(x) = 2x$. Vi vil bestemme den stamfunktion til f , som går igennem punktet $P(4, 5)$.

Vi finder først en stamfunktion, men denne gang lægger vi et c til. Vi får så

$$F(x) = x^2 + c.$$

Vi mangler nu bare at finde ud af hvad c skal være, for at grafen for stamfunktionen kommer til at gå igennem P . Hvis funktionen skal gå igennem P , så skal $F(4) = 5$. Det giver os ligningen:

$$4^2 + c = 5$$

Vi isolerer c og får $c = -11$. Altså er forskriften

$$F(x) = x^2 - 11.$$

Øvelse 1.1.4

Lad $f(x) = 4x - 1$.

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går igennem punktet $P(1, 3)$

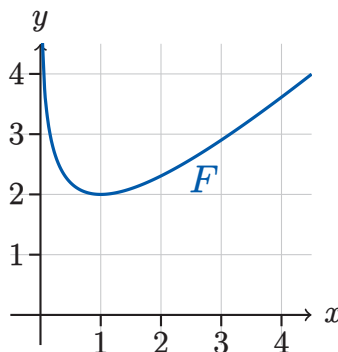
Øvelse 1.1.5

Lad $f(x) = e^x + 2x$.

- a) Bestem den stamfunktion F , der opfylder $F(0) = -7$

Øvelse 1.1.6

Her ses grafen for en stamfunktion F til $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$.



- a) Bestem først ud fra forskriften for f en forskrift for F på formen $F(x) + c$.
- b) Aflæs nu et pænt punkt på grafen og bestem ud fra det konstanten c .
- c) Opskriv den endelige forskrift for F

Man kan undre sig over, om alle funktioner har stamfunktioner. Det viser sig at der findes funktioner, som ikke har stamfunktioner, men

hvis en funktion er *kontinuert*, så har den også en stamfunktion. Derfor vil vi ofte kræve at funktioner er kontinuerte, når vi opskriver sætninger – så er vi sikre på at funktionerne har stamfunktioner. Vi husker at en funktion, løst sagt, er kontinuert, hvis grafen er sammenhængende (den er uden huller eller hop). I praksis er det ikke noget som vi vil bekymre os om, når vi regner opgaver.

1.2 Ubestemte integraler

I sidste afsnit lærte vi, at når vi har en funktion f og en stamfunktion F , så kan samtlige stamfunktioner skrives på formen $F(x) + c$. Det motiverer følgende definition:

Definition 1.2.1

Lad f være en funktion og $F(x)$ en stamfunktion til f . Det *ubestemte integral af f* er givet ved:

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

hvor c er en arbitrær konstant.

Ordet arbitrær betyder i denne sammenhæng ”ikke videre bestemt”. På den måde kan man opfatte $\int f(x) dx$ som at være en repræsentant for *samtlig*e stamfunktioner til f . Integralet er altså *ubestemt*, fordi det ikke giver en konkret stamfunktion. Det er først når c får en værdi, at vi får en konkret stamfunktion. Notationen dx betyder at det er x som er variablen. Derfor læses $\int f(x) dx$ også nogle gange som *det ubestemte integral af f af x med hensyn til x* . Symbolet $\int$ kaldes et *integraltegn*, $f(x)$ kaldes *integranden* og c kaldes *integrationskonstanten*. At regne det ubestemte integral kaldes også at *integrere*.

Eksempel 1.2.1

Vi vil bestemme $\int 5^x dx$. Dvs. at vi skal finde en stamfunktion til 5^x og så lægge c til. Vi slår stamfunktionen op i formelsamlingen, og får i alt:

$$\int 5^x dx = \frac{1}{\ln(5)} 5^x + c$$

Øvelse 1.2.1

Med udgangspunkt i eksemplet oven over, skal du svare på følgende spørgsmål:

- a) Hvad er integranden ?
- b) Hvad har vi integreret med hensyn til?
- c) Med hvilket bogstav har vi betegnet integrationskonstanten?

Øvelse 1.2.2

Regn følgende ubestemte integraler

- a) $\int 2x dx$
- b) $\int \ln(x) dx$

Det er ikke altid variabelen hedder x . Det skal man dog ikke lade sig forvirre af. Det ændrer ikke noget i metoden.

Øvelse 1.2.3

Regn følgende ubestemte integraler

- a) $\int 2t^4 dt$
- b) $\int \sqrt{u} + 10 du$

Der gælder følgende regler for ubestemte integraler:

Sætning 1.2.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner og k en konstant som ikke er nul. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
2. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
3. $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

Vi har allerede fundet stamfunktioner som har form som dem i sætningen (f.eks. i eksempel 1.1.2). Men indtil nu har vi været nødt til at gætte og så tjekke ved at differentiere. Nu hvor vi har sætningen behøver vi ikke at tjekke at den fundne funktion rent faktisk er en stamfunktion.

Eksempel 1.2.2

Vi vil regne $\int 5x^2 dx$. Vi bruger reglen $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$:

$$\int 5x^2 dx = 5 \int x^2 dx = 5 \frac{1}{3} x^3 + c = \frac{5}{3} x^3 + c$$

Eksempel 1.2.3

Vi vil regne $\int x^2 + e^x dx$. Vi bruger reglen $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + e^x) dx &= \int x^2 dx + \int e^x dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + c_1 + e^x + c_2 \\ &= \frac{1}{3} x^3 + e^x + c \end{aligned}$$

Til sidst har vi samlet de to integrationskonstanter i en konstant $c = c_1 + c_2$. Normalt vil man dog springe mellemregningerne over og

bare skrive:

$$\int (x^2 + e^x) dx = \frac{1}{3}x^3 + e^x + c.$$

Det betyder ikke at reglen er unødvendig. Vi har stadig brugt den – det fremgår bare ikke at den måde, vi har skrevet det op.

Øvelse 1.2.4

Bestem vha. sætning 1.2.1 følgende stamfunktioner. Skriv hvilken regel du bruger.

a) $\int x^2 + 2x dx$

b) $\int 5e^x dx$

c) $\int 4x^3 + 5^x - 1 dx$

d) $\int \frac{5}{x} dx$

1.3 Bestemte integraler

Jeg fortalte i indledning, at man kunne bruge integralregning til at bestemme arealer. Arealbestemmelse foregår vha. det som kaldes *bestemte integraler*, og det er emnet for dette afsnit. Først i et senere afsnit, vil vi se, hvordan de bestemte integraler kan bruges til at finde arealer.

Definition 1.3.1

Lad f være en funktion og F en stamfunktion til f . For to reelle tal a og b er det *bestemte integral* af f fra a til b givet ved:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Tallet a kaldes den *nedre grænse* og tallet b kaldes den *øvre grænse*.

At regne et bestemt integral, med grænserne a og b , kaldes også at *integrere fra a til b* .

Når vi regner bestemte integraler, vil vi altid benytte skrivemåden:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Skrivemåden gør det nemmere at overskue processen.

Eksempel 1.3.1

Vi vil bestemme det bestemte integral: $\int_3^5 2x dx$.

$$\begin{aligned}\int_3^5 2x dx &= [x^2]_3^5 \\ &= 5^2 - 3^2 \\ &= 16.\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_3^5 2x dx = 16.$$

Læg mærke til at det bestemte integral er et tal og ikke en funktion. Læg også mærke til at det er et *bestemt* tal. Det afhænger ikke af hvilken en stamfunktion man vælger (se næste øvelse).

Øvelse 1.3.1

Betragt det bestemte integral $\int_3^5 2x \, dx$ fra eksempel 1.3.1.

- a) Regn integralet, men brug nu stamfunktionen $F(x) = x^2 + 7$. Får du samme tal som i eksemplet?
- b) Forklar hvorfor det ikke spiller nogen rolle, hvilken stamfunktion man vælger når man regner bestemte integraler.

Øvelse 1.3.2

Regn følgende bestemte integraler

- a) $\int_2^3 3x^2 \, dx$
- b) $\int_{-2}^5 (6t - 2) \, dt$
- c) $\int_0^1 e^x \, dx$
- d) $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{u} \, du$
- e) $\int_2^{-1} 5 \, dx$

Ligesom ved ubestemte integraler gælder der nogle regneregler for bestemte integraler:

Sætning 1.3.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner, a , b og c reelle tal, og k en konstant. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
3. $\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$
4. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$ (Indskudsreglen)

De tre første regler er fuldstændig tilsvarende til dem, vi så for ubestemte integraler.

Eksempel 1.3.2

Regel 1:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 10x \, dx &= 10 \int_{-2}^3 x \, dx \\ &= 10 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^3 \\ &= 10 \left(\frac{1}{2} 3^2 - \frac{1}{2} (-2)^2 \right) \\ &= 25\end{aligned}$$

Regel 2:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (6x + 2) \, dx &= \int_1^3 6x \, dx + \int_1^3 2 \, dx \\ &= [3x^2]_1^3 + [2x]_1^3 \\ &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 27 - 3 + 6 - 2 \\ &= 28\end{aligned}$$

Bare fordi man kan bruge en regel, betyder det ikke altid at det er smart at bruge den. Vi vil nu regne det sidste integral fra ovenstående eksempel uden at bruge regel 2.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (6x + 2) \, dx &= [3x^2 + 2x]_1^3 \\
&= 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - (3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1) \\
&= 27 + 6 - 3 - 2 \\
&= 28
\end{aligned}$$

Var det ikke nemmere? Mens det næsten altid er smart at trække konstanter ud foran integraltegnet (regel 1), er det sjældent smart at dele summer/differenser op (regel 2). Ligesom man kan tage konstanter ud foran integraltegnet, kan man også tage dem ud foran de firkantede parenteser:

$$[k \cdot F(x)]_a^b = k[F(x)]_a^b$$

Igen en nyttig regel som kunne have gjort udregninger i eksempel 1.3.2 en anelse nemmere:

Eksempel 1.3.3

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^3 10x \, dx &= 10 \int_{-2}^3 x \, dx \\
&= 10 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^3 \\
&= 10 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_{-2}^3 && \text{(Rykker konstant ud)} \\
&= 10 \cdot \frac{1}{2} (3^2 - (-2)^2) \\
&= 25
\end{aligned}$$

Indskudsreglen (sætning 1.3.1 punkt 4) er nyttig til integraler, hvor integranden er stykkevist defineret:

Eksempel 1.3.4

Lad funktionen f være defineret ved:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Vi vil regne integralet

$$\int_0^2 f(x) dx.$$

Da f er stykkevist defineret kan vi ikke finde en samlet stamfunktion, så vi bruger indskudsreglen til at dele den op, der hvor forskriften skifter (i $x = 1$):

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx && \text{(Indskudsregel med } c = 1) \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + [\ln(|x|)]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) + \ln |2| - \ln |1| && \text{(Rykket konstant ud)} \\ &= \frac{1}{3} + \ln(2) \\ &= 1,03 \end{aligned}$$

Altså er

$$\int_0^2 f(x) dx = 1,03$$

Øvelse 1.3.3

Betragt funktionen f med forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Regn $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

Ekstra

Sætning 1.3.1 indeholder de vigtigste regler for bestemte integraler, men for at gøre listen mere komplet, udvider vi med følgende regler:

1. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
2. $\int_a^a f(x) dx = 0$

Øvelse 1.3.4

Lad f være en funktion med en hemmelig forskrift. Antag at:

$$\int_2^7 f(x) dx = 10 \quad \text{og} \quad \int_4^7 f(x) dx = 3$$

Bestem

- a) $\int_2^7 3 \cdot f(x) dx$
- b) $\int_4^7 f(x) - 2 dx$
- c) $\int_7^2 f(x) dx$
- d) $\int_5^5 f(x) dx$
- e) $\int_2^4 f(x) dx$

1.4 Integration ved substitution

Som tidligere skrevet kan det være svært at bestemme stamfunktioner og dermed også at regne integraler. Vi skal nu se på en teknik, der kaldes *integration ved substitution*, som kan bruges når integralerne (bestemte eller ubestemte) har en særlig form.

Substitutionsmetoden for ubestemte integraler

Vi kan bruge integration ved substitution når integralet kan skrives på følgende form

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

Vi bemærker, at vi skal have en sammensat funktion med den indre funktions differentialkvotient ganget på. Hvis man har svært ved at se, om integralet har den helt rigtige form, kan man starte med at lede efter noget, der ligner en indre funktion. Er der sådan en, så kan man prøve om man kan komme igennem med metoden. Inden vi er klar til at demonstrere teknikken er vi først nødt til at indføre noget notation (dvs. en skrivemåde) for differentialkvotienter. Hvis vi har en funktion $f(x)$, vil vi kalde differentialkvotienten $\frac{df}{dx}$ i stedet for $f'(x)$. De funktioner vi vil differentiere hedder $t(x)$, så vi vil skrive differentialkvotienten som $\frac{dt}{dx}$. Den notation har i sig selv ikke noget med substitutionsmetoden at gøre, og vi vil da også møde den senere i andre sammenhænge.

Eksempel 1.4.1

Vi vil regne det ubestemte integral

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x dx.$$

Vi ser at integralet ser svært ud med de teknikker vi har lært indtil videre, og det er et tegn på at vi nok skal bruge substitution.

Vi kan se at $x^2 - 1$ ligner en indre funktion og derfor sætter vi

$$t = x^2 - 1.$$

Vi regner nu differentialkvotienten

$$\frac{dt}{dx} = 2x,$$

og ganger med dx på begge sider

$$dt = 2x \, dx$$

Vi genkender nu værdierne for t og dt i det oprindelige integral:

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx$$

så vi kan altså skrive integralet som

$$\int t^7 \, dt.$$

Det er et nemt integral. Det giver

$$\frac{1}{8}t^8 + c$$

og da $t = x^2 - 1$ får vi:

$$\frac{1}{8}(x^2 - 1)^8 + c.$$

Altså er:

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{8}(x^2 - 1)^8 + c.$$

Vi siger at vi har regnet integralet med *substitutionen* $t = x^2 - 1$.

Øvelse 1.4.1

Regn integralerne

a) $\int (x^3 - 1)^2 \cdot 3x^2 dx$

b) $\int e^{2x+1} \cdot 2 dx$

c) $\int 4x \cdot \sqrt{2x^2 + 1} dx$

d) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx$

Det er ikke altid man lige kan gennemskue hvad man skal substituere, så nogle gange må man bare gøre forsøget. Hvis man ikke kan få det til at gå op, er det fordi man har valgt forkert eller fordi substitutionsmetoden slet ikke kan bruges.

Eksempel 1.4.2

Vi vil regne det ubestemte integral

$$\int \sqrt{x^4 + 7} \cdot x^3 dx.$$

Vi sætter

$$t = x^4 + 7$$

og får:

$$\frac{dt}{dx} = 4x^3.$$

Vi "ganger" med dx og får

$$dt = 4x^3 dx.$$

Vi sammenligner nu værdierne for t og dt med vores integral og opdager at de ikke passer helt. Vi har et 4-tal for meget i vores udtryk for dt , så vi dividerer med 4 på begge sider:

$$\frac{1}{4} dt = x^3 dx.$$

Nu kan vi genkende udtrykkene for t og $\frac{1}{4} dt$ i integralet :

$$\int \sqrt{x^4 + 7} \cdot x^3 dx,$$

så vi kan skrive det som

$$\int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4} dt.$$

Vi rykker $\frac{1}{4}$ ud foran integralet og integrerer

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \sqrt{t} \cdot dt &= \frac{1}{4} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{6} t^{\frac{3}{2}} + c, \end{aligned}$$

og husker at $t = x^4 + 7$:

$$\frac{1}{6} (x^4 + 7)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Altså:

$$\int \sqrt{x^4 + 7} \cdot x^3 dx = \frac{1}{6} (x^4 + 7)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Øvelse 1.4.2

Regn følgende integraler

a) $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx$

b) $\int 2^{3x+1} dx$

c) $\int \frac{12x}{3x^2+1} dx$

Substitutionsmetoden for bestemte integraler

Substitutionsmetoden kan også bruges for bestemte integraler med kun en lille ændring.

Eksempel 1.4.3

Vi vil regne det bestemte integral

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx.$$

Det var det samme integral vi mødte i eksempel 1.4.1 denne gang bare med grænser (dvs. som bestemt integral). Vi starter på samme måde som ved ubestemte integraler. Vi sætter

$$t = x^2 - 1,$$

og får på sædvanlig vis

$$dt = 2x \, dx$$

MEN nu kommer det nye. Grænserne. De skal ændres til grænser for t i stedet for grænser for x . Vi indsætter integralets grænser i udtrykket for t :

$$\text{Nedre grænse: } t = 1^2 - 1 = 0 \quad \text{Øvre grænse: } t = 2^2 - 1 = 3.$$

Nu indsætter vi vores værdier i integralet helt som ved ubestemte integraler bortset fra at vi indsætter grænserne for t som vi lige har regnet:

$$\begin{aligned} \int_0^3 t^7 \, dt &= \left[\frac{1}{8} t^8 \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{8} [t^8]_0^3 \\ &= \frac{1}{8} (3^8 - 0^8) \\ &= 820,125. \end{aligned}$$

Altså er

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx = 820,125.$$

Øvelse 1.4.3

Regn følgende integraler

a) $\int_{-2}^2 (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx$

b) $\int_{-1}^3 e^{-2x+3} \, dx$

c) $\int_2^8 \frac{2\sqrt{\ln(x)}}{x} \, dx$

Ekstra

Det vi har set indtil videre virker. Man får det rigtige facit. Men man kan undre sig over metoden. Hvorfor må man gange med dx ? Jeg skrev at $\frac{dt}{dx}$ betød $t'(x)$. Så $\frac{dt}{dx}$ er **ikke** en brøk, men et samlet betegnelse for differentialkvotienten. Altså har dx ikke nogen betydning i sig selv, og derfor burde man ikke kunne gange med det. Det er en lidt længere historie at skulle forklare, hvorfor man (i denne sammenhæng) kan tillade sig at opfatte differentialkvotienten som en brøk, så jeg vil i stedet vise en metode, hvor vi ikke er afhængig af den slags hokus pokus. Metoden tager udgangspunkt i følgende to sætninger.

Sætning 1.4.1

Lad f være en kontinuert funktion og g en differentiabel funktion. Så gælder:

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt,$$

hvor $t = g(x)$.

Sætning 1.4.2

Lad f være en kontinuert funktion, g en differentiabel funktion og lad a og b være to reelle tal. Så gælder:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt,$$

hvor $t = g(x)$.

I sætningerne er det underforstået, at vi substituerer tilbage til x efter vi har integreret.

Eksempel 1.4.4

Vi vil regne det ubestemte integral fra eksempel 1.4.1:

$$\int (x^2 - 1)^7 \cdot 2x dx.$$

Vi ser at det har form som

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

med $g(x) = x^2 - 1$ og $f(t) = t^7$, hvor $t = g(x)$. Vi bruger sætning 1.4.1:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1)^7 2x dx &= \int t^7 dt \\ &= \frac{1}{8} t^8 + c \\ &= \frac{1}{8} (x^2 - 1)^8 + c \end{aligned}$$

Eksempel 1.4.5

Vi vil regne det bestemte integral fra eksempel 1.4.3

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^7 \cdot 2x \, dx.$$

Som før ser vi at det har form som $\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx$ med $g(x) = x^2 - 1$ og $f(t) = t^7$, hvor $t = g(x)$. Vi bruger sætning 1.4.2

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 1)^7 2x \, dx &= \int_{g(1)}^{g(2)} t^7 \, dt \\ &= \int_{1^2-1}^{2^2-1} t^7 \, dt \\ &= \int_0^3 t^7 \, dt \\ &= \left[\frac{1}{8} t^8 \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{8} [t^8]_0^3 \\ &= \frac{1}{8} (3^8 - 0^8) \\ &= 820,125. \end{aligned}$$

Øvelse 1.4.4

- a) Regn den sidste integral i hver øvelse i dette afsnit vha. sætning 1.4.1 og sætning 1.4.2.

1.5 Arealbestemmelse ved integralregning

Vi er nu endelig klar til at se, hvad vi kan med integralregning. Vi skal nemlig se, hvordan integralregning kan bruges til at bestemme arealer.

Alt efter hvordan arealerne er placeret, skal vi bruge lidt forskellige teknikker.

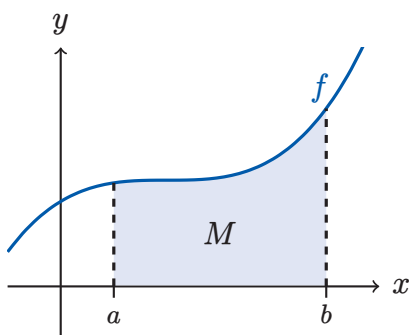
Areal under ikke-negativ funktion

Vi starter med at se på situationen, hvor vi vil bestemme et areal under en ikke-negativ (dvs. positiv eller nul) funktion.

Sætning 1.5.1 (Differential- og integralregningens hovedsætning)

Lad f være kontinuert funktion, som er ikke-negativ på intervallet $[a, b]$.

Lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f :



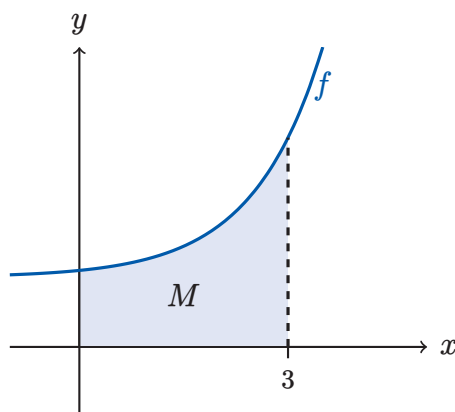
Arealet A er bestemt ved:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Sætningen er umiddelbart lidt overraskende. Sådan som vi har defineret bestemte integraler, har de jo ikke noget med arealer at gøre. Men det har de så alligevel. Interessant.

Eksempel 1.5.1

Lad $f(x) = 0,1e^x + 1$. Vi vil bestemme arealet A af området M , afgrænset af førsteaksen, andenaksen, funktionen f og linjen med ligningen $x = 3$. Vi har altså



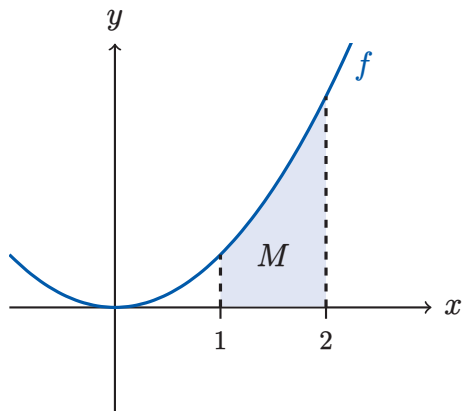
Vi bruger sætning 1.5.1:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 (0,1e^x + 1) dx \\ &= [0,1e^x + x]_0^3 \\ &= 0,1e^3 + 3 - (0,1e^0 + 0) \\ &= 4,91 \end{aligned}$$

Arealet af M er altså 4,91

Øvelse 1.5.1

Betragt området M begrænset af førsteaksen, linjen $x = 1$, linjen $x = 2$ og funktionen med forskriften $f(x) = \frac{1}{2}x^2$:



- a) Bestem arealet A af området M

Det er ikke altid, at man får en tegning af området, så man skal kunne afkode hvilket område der er tale om ud fra den sproglige beskrivelse.

Øvelse 1.5.2

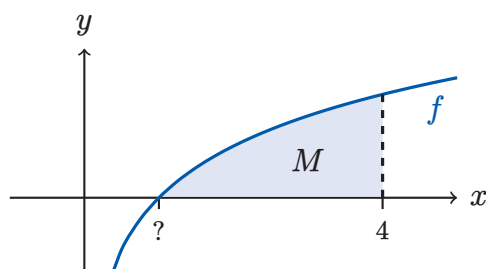
Lad M betegne området afgrænset af førsteaksen, linjen $x = 2$, linjen $x = 10$ og funktionen med forskriften $f(x) = \ln(x)$:

- a) Lav en hurtig skitse af området. Hvis du ikke kan huske hvordan grafen for $\ln(x)$ ser ud... jaaah så må du jo tegne i GeoGebra
- b) Bestem arealet A af M .

Nogle gange skal man regne lidt for at finde grænserne til ens integral.

Eksempel 1.5.2

Lad $f(x) = \ln(x)$. Vi vil bestemme arealet af området M , afgrænset af førsteaksen, funktionen f og linjen med ligningen $x = 4$. Vi har altså



Vi kan se at, vi er nødt til at bestemme nulpunktet for f før vi kan integrere:

$$\begin{aligned}\ln(x) &= 0 \\ e^{\ln(x)} &= e^0 && \text{(Vi bruger } e^x \text{ på begge sider)} \\ x &= 1\end{aligned}$$

Okay, så vi skal altså have 1 som nedre grænse i vores integral.

Vi bruger sætning 1.5.1:

$$\begin{aligned}A &= \int_1^4 f(x) dx \\ &= \int_1^4 \ln(x) dx \\ &= [x \ln(x) - x]_1^4 \\ &= 4 \ln(4) - 4 - (1 \cdot \ln(1) - 1) \\ &= 2,55\end{aligned}$$

Øvelse 1.5.3

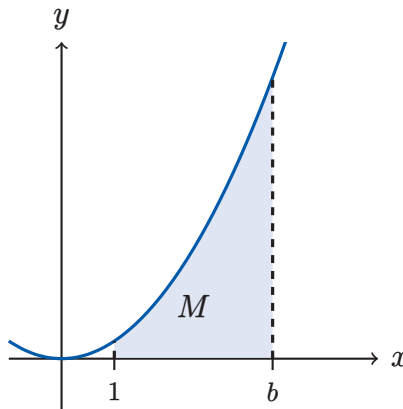
Lad $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

- Beregn nulpunkterne for f .
- Funktionen f afgrænser sammen med førsteaksen et område M . Lav ud fra nulpunkterne og din viden om andengradspolynomier en hurtig skitse af M .
- Beregn arealet A af området M .

Nogle gange er selve arealet givet og man skal så i stedet bestemme noget andet i integralet.

Eksempel 1.5.3

Betragt arealet A af området afgrænset førsteaksen, funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, linjen $x = 1$ og linjen $x = b$. Vi vil bestemme b således at $A = 7$. Området ser altså sådan ud:



Vi ved at arealet skal være 7 så vi kan opstille ligningen:

$$A = 7,$$

og vi kan så bruge sætning 1.5.1 til at bestemme A :

$$\int_1^b f(x) dx = 7$$

$$\int_1^b \frac{1}{3} x^2 dx = 7$$

$$\frac{1}{3} \int_1^b x^2 dx = 7$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^b = 7$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} [x^3]_1^b = 7$$

$$\frac{1}{9} (b^3 - 1^3) = 7$$

$$b^3 - 1^3 = 63$$

$$b^3 = 64$$

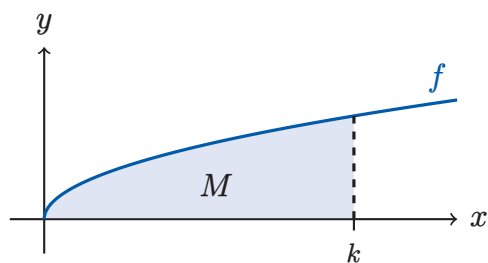
$$b = \sqrt[3]{64}$$

$$b = 4$$

Altså er $b = 4$.

Øvelse 1.5.4

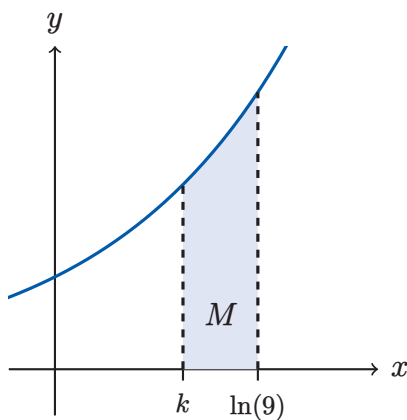
Lad $f(x) = \sqrt{x}$ og betragt arealet afgrænset af førsteaksen, andenaksen og linjen $x = k$:



a) Bestem k så arealet af M er 18

Øvelse 1.5.5 (✚)

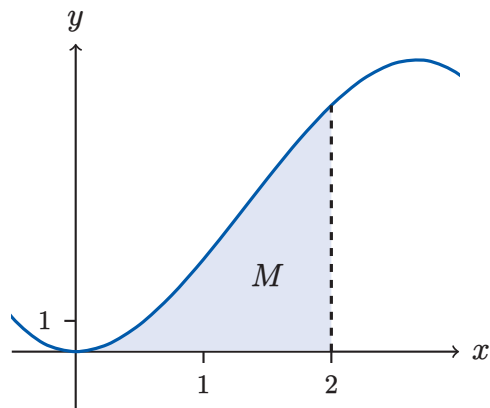
Lad $f(x) = e^{0,5x}$. Betragt arealet afgrænset af førsteaksen, f , linjen $x = k$ og linjen $x = \ln(9)$:



a) Bestem k således at M får et areal på 2.

Øvelse 1.5.6

Lad $f(x) = -x^3 + q \cdot x^2$ og lad M betegne området afgrænset af x -aksen, funktionen f og linjen $x = 2$. Hvis $q = 2$ ser M således ud:



a) Bestem q således at arealet af M er 4.

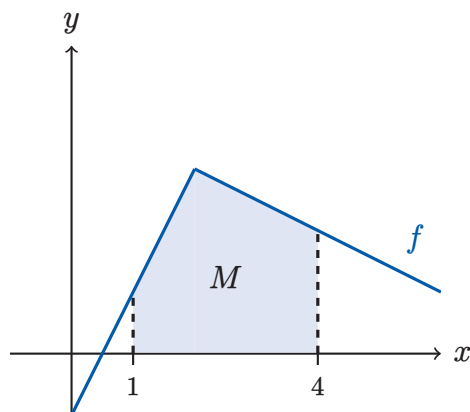
Er funktionen stykkevist defineret, kan man finde arealet ved at regne hver del for sig:

Eksempel 1.5.4

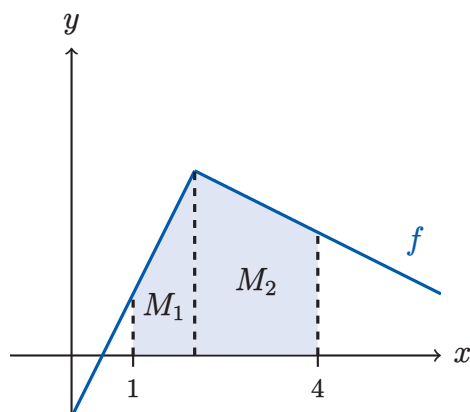
Betragt funktionen f give ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

Vi bestemmer nu arealet A af området M , afgrænset af førsteaksen, $x = 1$, $x = 4$ og funktionen f . Altså arealet markeret her:



Funktionen skifter forskrift ved $x = 2$ (se forskriften), og derfor deler vi området op i to dele:



Vi regner nu arealet A_1 af M_1

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_1^2 f(x) \, dx \\
 &= \int_1^2 (2x - 1) \, dx \\
 &= 2
 \end{aligned}
 \quad \text{(Lav selv mellemregninger)}$$

Vi regner nu arealet A_2 af M_2 .

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_2^4 f(x) \, dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x + 4 \right) \, dx \\ &= 5 \end{aligned} \quad (\text{Lav selv mellemregninger})$$

Arealet af M er altså $A_1 + A_2 = 2 + 5 = 7$.

Øvelse 1.5.7

Lad f give ved

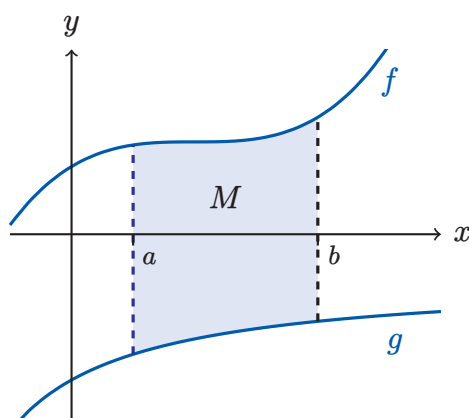
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 4 - x & x \geq 1 \end{cases}$$

- Tegn grafen for f i GeoGebra.
- Bestem arealet A af området M afgrænset af f og førsteaksen.

Areal mellem to grafer

Sætning 1.5.2

Lad f og g være to funktioner defineret på intervallet $[a, b]$. Antag at $f > g$ og lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, funktion g og funktionen f :



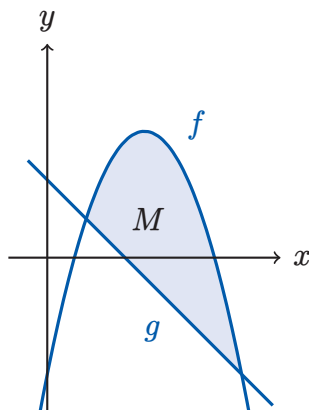
Arealet A er bestemt ved:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Bemærk at der ikke er nogen krav til hvordan funktionerne ligger i forhold til x -aksen. Vi kræver kun at f er større end g .

Eksempel 1.5.5

Vi vil bestemme arealet A af området M mellem graferne for funktionerne $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ og $g(x) = -x + 2$. Altså:



Vi starter med at beregne skæringspunkter mellem f og g som vi har lært på b-niveau. Skæringspunkterne har $x = 1$ og $x = 5$. Vi kan nu anvende sætning 1.5.2:

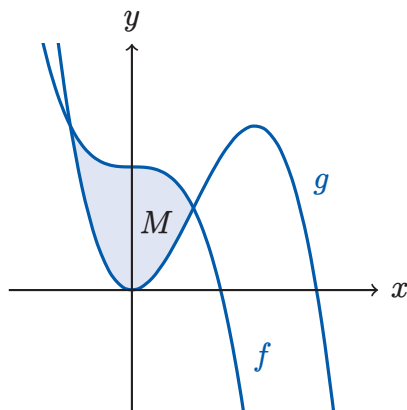
$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^5 (f(x) - g(x)) dx \\
 &= \int_1^5 (-x^2 + 5x - 3 - (-x + 2)) dx \\
 &= \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

(Lav selv mellemregninger)

Læg mærke til at grafen for f ligger over grafen for g . Havde de ligget omvendt, skulle vi have integreret $g(x) - f(x)$ i stedet for $f(x) - g(x)$.

Øvelse 1.5.8

Lad $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 4$ og $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2$. Graferne for de to funktioner afgrænser et område M som har et areal A .



- Bestem x-koordinaterne til skæringspunkterne mellem f og g .
- Bestem A .

Øvelse 1.5.9

Lad $f(x) = x^2 - 4x$ og $g(x) = -2x$. Graferne for de to funktioner afgrænser et område M som har et areal A .

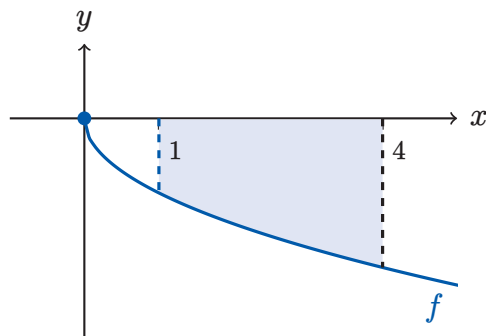
- Tegn M (f.eks. i GeoGebra).
- Bestem A .

Areal over ikke-positiv funktion

Sætning 1.5.2 kan også bruges til at finde arealet over en ikke-positiv (negativ eller nul) funktion.

Eksempel 1.5.6

Vi vil regne arealet A af området M afgrænset af funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$, x -aksen og linjerne $x = 1$ og $x = 4$:



Så vi kan ikke bruge sætning 1.5.1, da grafen er under x -aksen. Men vi kan bruge sætning 1.5.2, selvom vi umiddelbart kun har én funktion. Sætter vi $g(x) = 0$, så vil grafen for g ligge oven i x -aksen, og vi kan derfor regne arealet som et areal mellem to grafer:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^4 (g(x) - f(x)) \, dx && \text{(Bemærk at } g > f) \\
 &= \int_1^4 (0 - (-\sqrt{x})) \, dx \\
 &= \int_1^4 \sqrt{x} \, dx \\
 &= \frac{14}{3} && \text{(Lav selv mellemregninger)}
 \end{aligned}$$

Altså er $A = \frac{14}{3}$

Øvelse 1.5.10

Lad funktion f være givet ved forskriften

$$f(x) = -2^x + x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

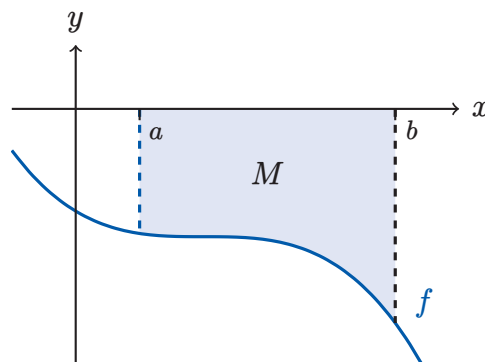
- Bestem ved hjælp af GeoGebra nulpunkter for f .
- Tegn grafen for f i GeoGebra.

- c) Bestem arealet A af det område, som er afgrænset af f , førsteaksen og andenaksen.
- d) Sammenlign dit beregnede areal med grafen i GeoGebra. Ser resultatet rimeligt ud?

Som du måske har gennemskuet er der en simplere måde at regne arealet over en negativ funktion.

Sætning 1.5.3

Lad f være kontinuert funktion, som er ikke-positiv på intervallet $[a, b]$ og lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f :



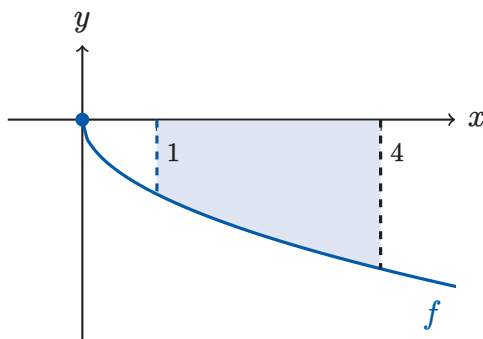
Arealet A er bestemt ved:

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

Vi ser altså at vi kan finde arealet over en negativ funktion ved at regne det bestemte integral (som om grafen var positiv), hvis altså bare vi sætter et minus foran integralet.

Eksempel 1.5.7

Vi vender tilbage til funktionen fra eksempel 1.5.6. Vi vil altså regne arealet A af området M afgrænset af funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$, x -aksen og linjerne $x = 1$ og $x = 4$:



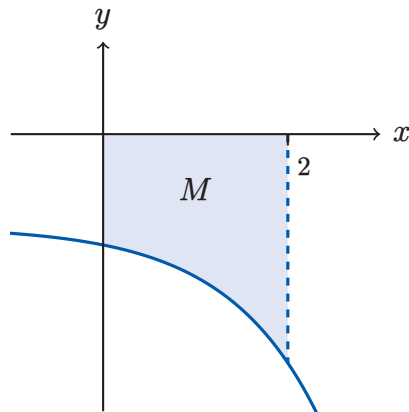
Vi bruger sætning 1.5.3, da grafen er under x -aksen:

$$\begin{aligned} A &= - \int_1^4 f(x) \, dx \\ &= - \int_1^4 -\sqrt{x} \, dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned} \quad (\text{Lav selv mellemregninger})$$

Altså er $A = \frac{14}{3}$

Øvelse 1.5.11

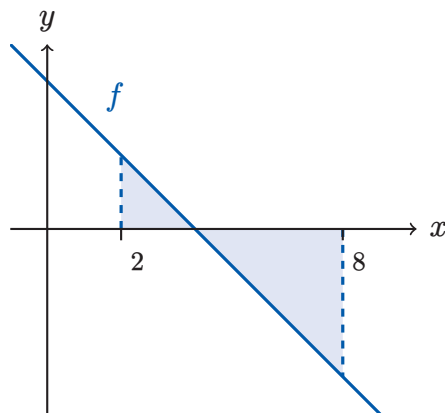
Lad $f(x) = -0,2e^x - 1$. Grafen afgrænser sammen med førsteaksen, andenaksen og linjen $x = 2$ et område M :



a) Regn arealet af M ved hjælp af metoden fra sætning 1.5.3.

Eksempel 1.5.8

Lad $f(x) = -x + 4$. Vi vil bestemme arealet A af området markeret her:



Vi ser at den første del af arealet er over x -aksen og den anden del er under, og derfor må vi regne de to dele hver for sig. Vi finder først nulpunktet

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\-x + 4 &= 0 \\x &= 4\end{aligned}$$

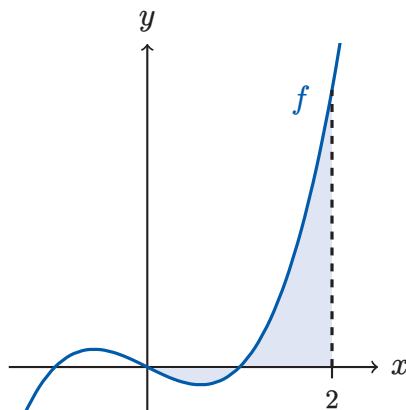
Kalder vi arealet over x -aksen for A_1 og arealet under for A_2 får vi:

$$\begin{aligned}A &= A_1 + A_2 \\&= \int_2^4 f(x) \, dx + \left(- \int_4^8 f(x) \, dx \right) \\&= \int_2^4 (-x + 4) \, dx + \left(- \int_4^8 (-x + 4) \, dx \right) \\&= \int_2^4 (-x + 4) \, dx - \int_4^8 (-x + 4) \, dx \\&= 2 + 8 \\&= 10\end{aligned} \quad (\text{Regn selv efter})$$

Altså er arealet 10.

Øvelse 1.5.12

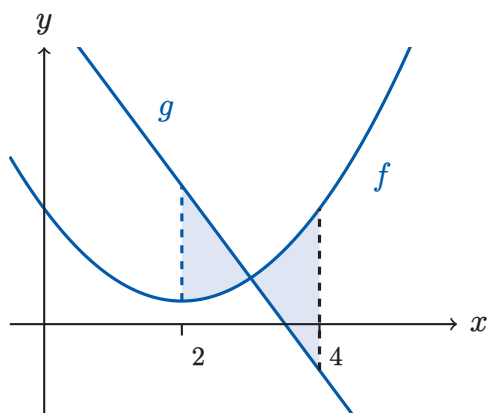
Lad $f(x) = x^3 - x$. Betragt arealet markeret med blå:



- Hvordan bestemmer man nulpunkter for f ? Hvilken teknik?
- Beregn nulpunkterne for f .
- Bestem det markerede areal.

Eksempel 1.5.9

Lad $f(x) = x^2 - 4x + 5$ og $g(x) = -4x + 14$, og betragt det markerede areal:



Vi vil nu regne arealet. Vi vil gerne bruge sætning 1.5.2 (areal mellem to grafer) men vi har et problem. Sætningen forudsætter nemlig at

den ene graf ligger over den anden. I dette eksempel har vi først $g > f$ og efter skæringspunkt gælder $f > g$. Vi løser problemet ved at regne de to delarealer, lad os kalde dem A_1 og A_2 , hver for sig. Vi starter med at beregne skæringspunktet, hvilket giver (tjek selv):

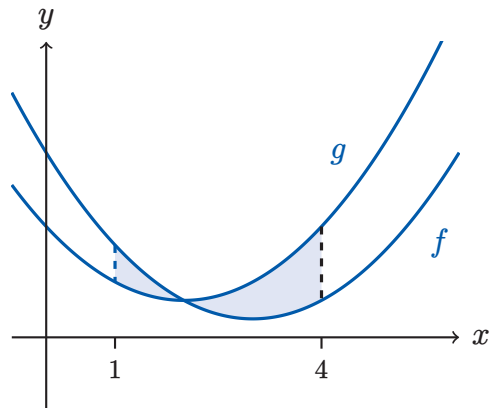
$$x = 3$$

Vi kan nu regne arealet sum summen af de to delarealer:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_2^3 (g(x) - f(x)) \, dx + \int_3^4 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_2^3 (-4x + 14 - (x^2 - 4x + 5)) \, dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 5 - (-4x + 14)) \, dx \\ &= \int_2^3 (x^2 - 9) \, dx + \int_3^4 (-x^2 + 9) \, dx \\ &= \frac{8}{3} + \frac{10}{3} \quad (\text{Lav selv mellemregninger}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Øvelse 1.5.13

Lad $f(x) = x^2 - 6x + 10$ og $g(x) = x^2 - 4x + 6$. Og betragt det markerede område:



a) Bestem arealet af det markerede område

Vurdering af integral ud fra graf

Fordi vi kender betydning af et bestemt integral, både for grafer over og under x-aksen, kan vi nu bestemme en ca.-værdi for bestemte integraler alene ud fra deres graf:

Eksempel 1.5.10

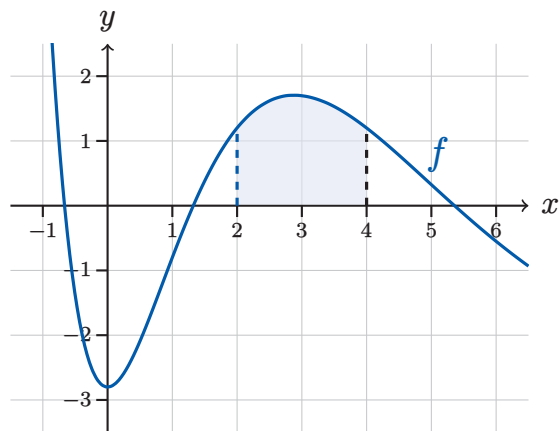
Betragt funktionen

$$f(x) = 4x^2 \cdot 0.5^x - 2.8.$$

Det er svært at bestemme en stamfunktion til f , men vi kan ud fra grafen anslå værdien af forskellige bestemte integraler.

Vi vil først bestemme integralet $\int_2^4 f(x) dx$

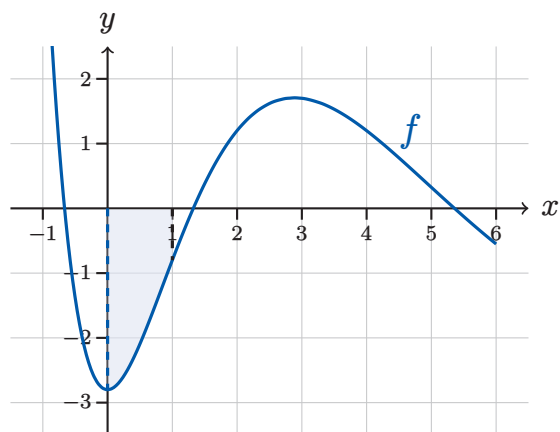
Vi tegner grafen og markerer arealet mellem grafen og x-aksen i intervallet $[2; 4]$



Fra sætning 1.5.1 ved vi at $\int_2^4 f(x) dx$ er det markerede areal. Vi tæller tern og når frem til at arealet er ca. 3. Altså er $\int_2^4 f(x) dx \approx 3$.

Vi vil nu vurdere værdien integralet $\int_0^1 f(x) dx$

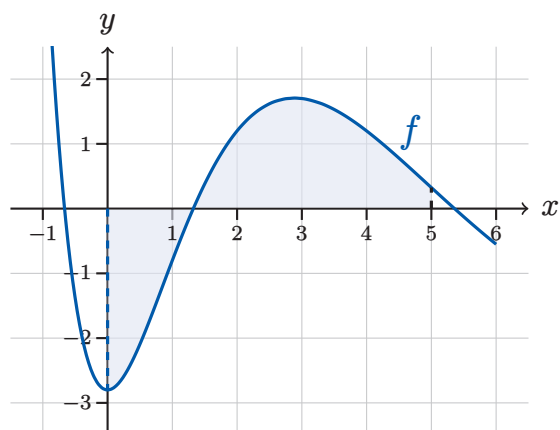
Vi markerer arealet mellem grafen og x-aksen i intervallet $[0; 1]$



Fra sætning 1.5.3 ved vi at $\int_0^1 f(x) dx$ er det markerede areal, men med et minus på. Vi tæller tern og når frem til at arealet er ca. 2. Så skal vi bare putte et minus på. Vi får altså $\int_0^1 f(x) dx \approx -2$.

Til slut vil vi anslå værdien integralet $\int_0^5 f(x) dx$.

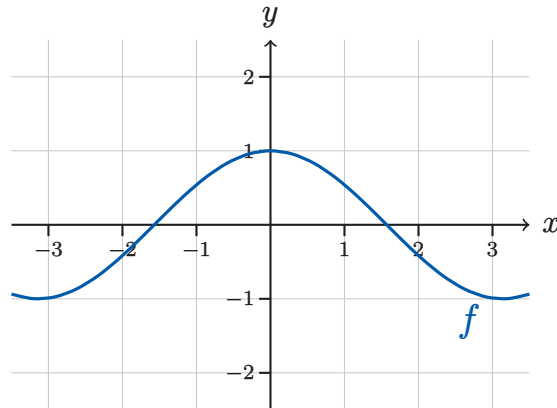
Vi markerer arealet mellem grafen og x-aksen i intervallet $[0; 5]$:



Indskudsreglen tillader os dele integralet op i to. Først en del hvor funktionen ligger under x-aksen. Her er arealet ca. 2 og det skal der et minus på, så det bidrager med ca. -2 . Derefter er der en del over x-aksen og her er arealet ca. 4, så det bidrager med 4. I alt får vi $\int_0^5 f(x) dx \approx -2 + 4 = 2$.

Øvelse 1.5.14

Betragt funktionen f



Vurder værdien af følgende integraler ved at tælle tern som i eksemplet ovenover.

a) $\int_0^{1,5} f(x) dx$

b) $\int_{1,5}^3 f(x) dx$

c) $\int_{-3}^3 f(x) dx$

d) $\int_3^{1,5} f(x) dx$ (hmm nu er øvre grænse mindre end nedre, hvordan er det nu, det er med det...?)

Øvelse 1.5.15

Ved at tegne i GeoGebra og tælle tern, skal du vurdere værdien af følgende integraler:

a) $\int_{-4}^{-2} (-2x^3 e^x - 1) dx$

b) $\int_{-9}^{-5} (-2x^3 e^x - 1) dx$

c) $\int_{-5}^{-9} (-2x^3 e^x - 1) dx$

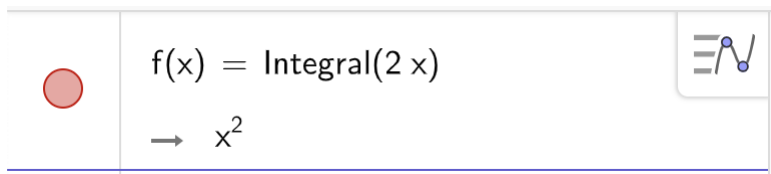
1.6 Integraler i GeoGebra

Man finder en stamfunktion med kommandoen :

`Integral(Funktion)`

Eksempel 1.6.1

Vi vil bestemme en stamfunktion F til $f(x) = 2x$ i GeoGebra. I et algebravindue skriver vi: `Integral(2x)`:



og vi kan se at $F(x) = x^2$ er en stamfunktion til f (vi skriver F selvom GeoGebra kalder stamfunktionen f)

Øvelse 1.6.1

Lad $f(x) = x \cdot e^x$.

- a) Bestem i GeoGebra en stamfunktion til f .

Ubestemte integraler bestemmer man også med kommandoen `Integral(funktion)`, men man skal indtaste den i CAS:

Eksempel 1.6.2

Vi vil bestemme $\int 2x \, dx$ i GeoGebra. Vi åbner CAS og skriver: `Integral(2x)`:

1 Integral(2x)

→ $x^2 + c_1$

Vi kan se at GeoGebra kalder integrationskonstanten c_1 . Vi plejer at kalde den for c vores facit er $\int 2x \, dx = x^2 + c$

Øvelse 1.6.2

Lad $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a) Regn $\int f(x) \, dx$ i GeoGebra CAS.

Vil man bestemme en bestemt stamfunktion (f.eks. gennem et punkt), så finder man først det ubestemte integral, og derefter bruger man kommandoen **Løs** til at finde integrationskonstanten.

Eksempel 1.6.3

Vi vil bestemme den stamfunktion F til $f(x) = 2x$, som går igennem punktet $(4, 5)$.

Vi skal igen bruge CAS. Vi starter med regne det ubestemte integral, men denne gang vil vi gerne kalder resultatet F , så vi skriver: $F(x) := \text{Integral}(2x)$.

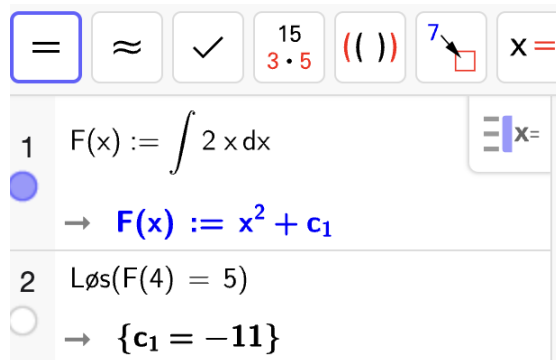
= $\approx$ $\checkmark$ $\frac{15}{3 \cdot 5}$ $(())$ 7 $x =$

1 $F(x) := \int 2x \, dx$

→ $F(x) := x^2 + c_1$

Vi skal nu finde ud af hvad integrationskonstanten skal være så vi

skriver: $(F(4)=5)$:



Vi ser at $c_1 = -11$, så vores facit er:

$$F(x) = x^2 - 11$$

Øvelse 1.6.3

Lad $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- a) Bestem (i GeoGebra) den stamfunktion til f som går igennem punktet $(1, 2)$.

Bestemte integraler

Bestemte integraler regner man også med kommandoen **Integral**, men hvor man tilføjer de to integrationsgrænser (nedre, øvre - adskilt af komma).

Eksempel 1.6.4

Vi vil regne det bestemte integral: $\int_3^5 2x \, dx$. Den nedre grænse er 3 og den øvre er 5, så vi skriver **Integral(2x,3,5)** i et algebra vindue):



```
a = Integral(2 x, 3, 5)
```

```
→ 16
```

Altså er

$$\int_3^5 2x \, dx = 16.$$

Øvelse 1.6.4

Regn i GeoGebra:

a) $\int_3^7 \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

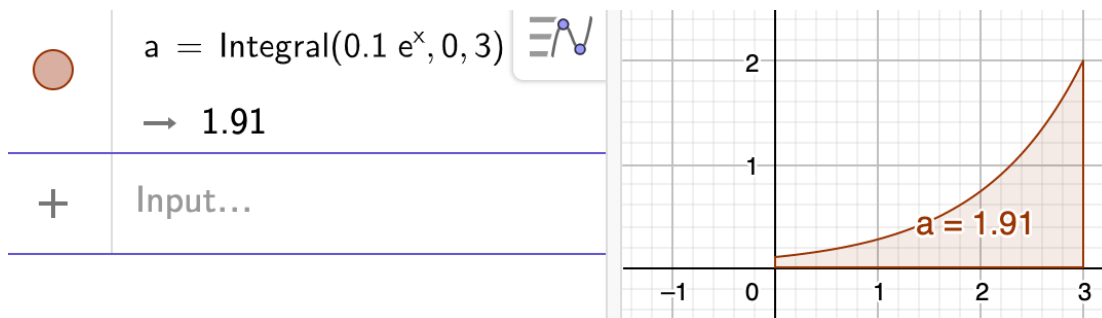
Areal under graf

Da arealer under grafer er givet ved bestemte integraler er der ikke rigtig noget ny her i forhold til GeoGebra. Men okay her er et eksempel alligevel:

Eksempel 1.6.5

Lad $f(x) = 0,1e^x$. Vi vil bestemme arealet af området M, afgrænset af førsteaksen, andenaksen, funktionen f og linjen med ligningen $x = 3$.

Vi skriver: `Integral(0.1e^x, 0, 3):`



Vi kan se at $A = 1,91$. Vi kan endda se selve arealet i tegneblokken til højre.

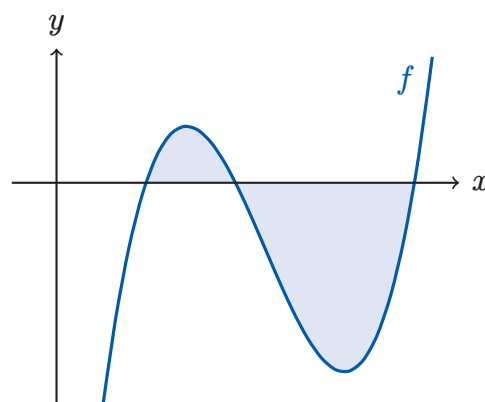
Øvelse 1.6.5

Lad $f(x) = x^3 - e^x$. Lad A betegne arealet af punktmængden afgrænset af førsteaksen, andenaksen, f og linjen $x = 1$.

a) Bestem A i GeoGebra

Øvelse 1.6.6

Lad $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde som vist her:



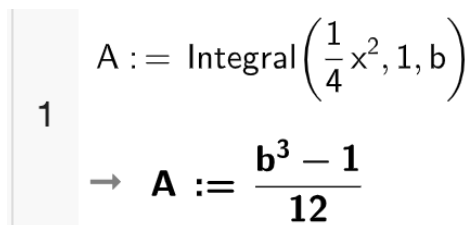
a) Bestem arealet af punktmængden.

Måske er det mere interessant, at se et eksempel på, hvordan man bestemmer en ukendt konstant i forbindelse med et integral.

Eksempel 1.6.6

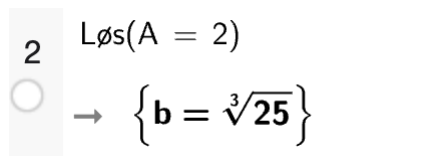
Betragt arealet A af området afgrænset førsteaksen, funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, linjen $x = 1$ og linjen $x = b$. Vi vil bestemme b således at $A = 2$.

Vi åbner CAS og skriver: $A := \text{Integral}(1/4x^2, 1, b)$ og får:



1 $A := \text{Integral}\left(\frac{1}{4}x^2, 1, b\right)$
 $\rightarrow A := \frac{b^3 - 1}{12}$

Vi kan nu finde b ved at løse ligningen $A = 2$. Vi skriver: $\text{Løs}(A=2)$



2 $\text{Løs}(A = 2)$
 $\rightarrow \{b = \sqrt[3]{25}\}$

Vi vil gerne have decimaltal, så vi trykker krøllet lighedstegn:



og vi får facit:

3	\$2
☐	$\approx \{\mathbf{b} = 2.92\}$

Altså $b = 2,92$

Øvelse 1.6.7

Lad $f(x) = \sqrt{x^2 + k}$. Lad A betegne arealet afgrænset af førsteaksen, andenaksen, f og linjen $x = 1$

- Hvis GeoGebra-kommandoen **Løs** ikke virker, findes der en anden kommando man kan bruge. Hvad er det for en kommando? og hvad er forskellen på de to kommandoer?
- Bestem k så $A = 1$.

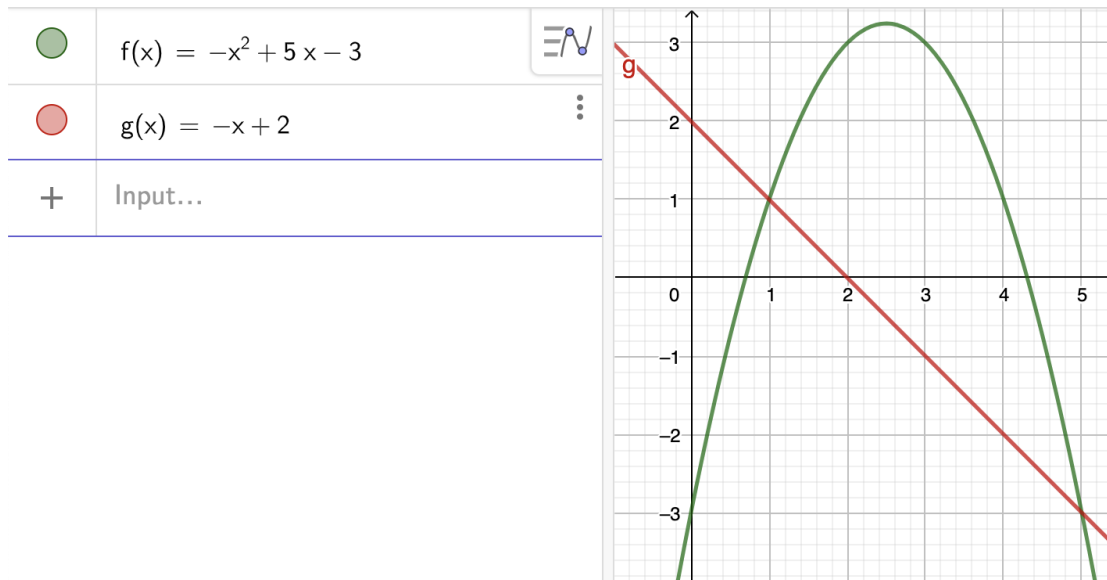
Areal mellem to grafer

Arealet mellem to grafer findes med kommandoen **IntegralMellem**. Her skal man bruge de to x -værdier som afgrænser arealet.

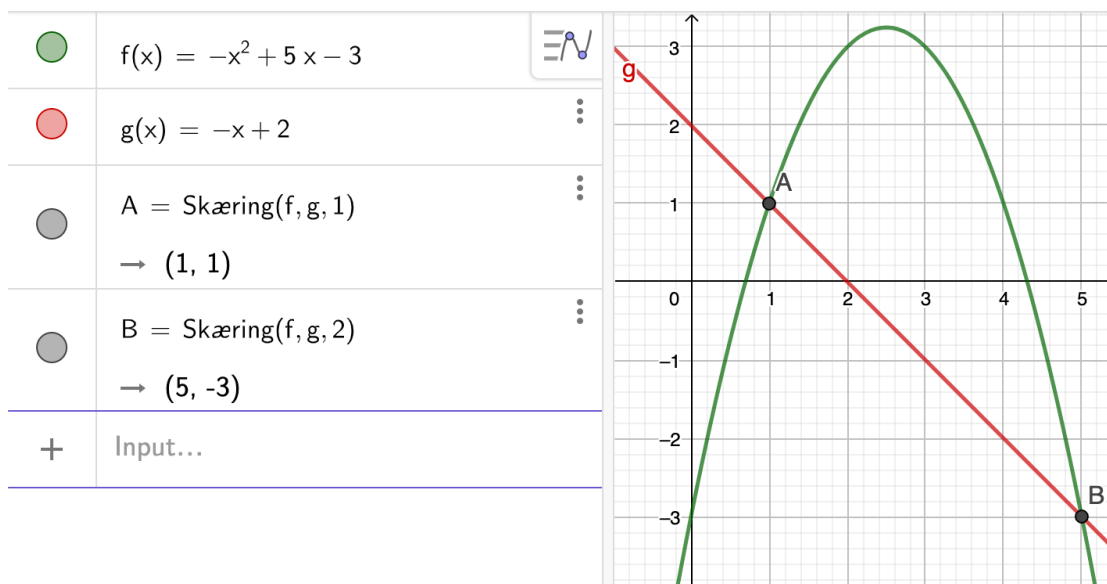
Eksempel 1.6.7

Vi vil bestemme arealet A af området M mellem graferne for funktionerne $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ og $g(x) = -x + 2$.

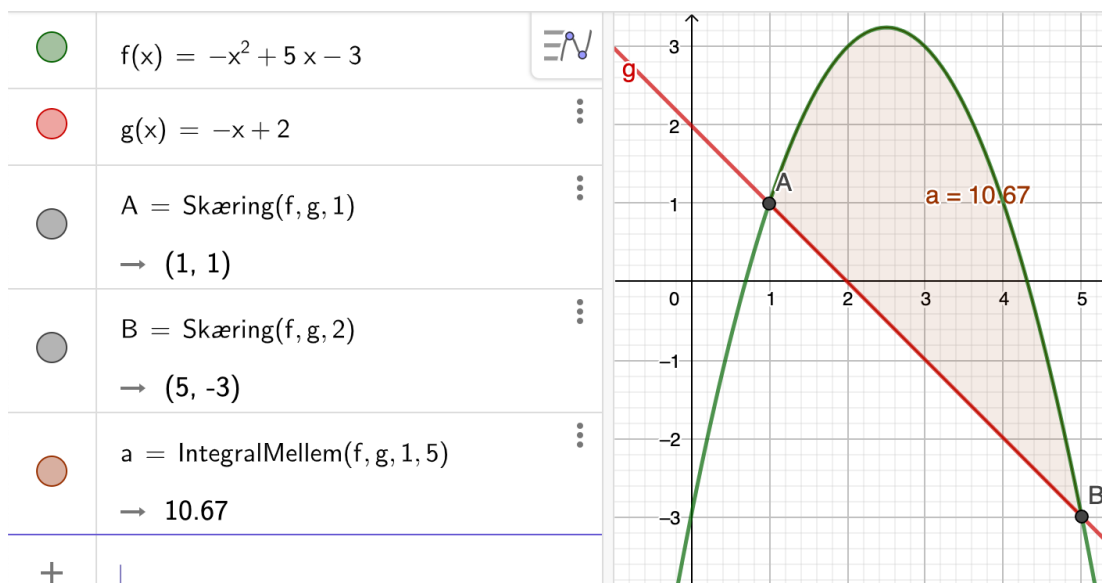
Vi starter med at tegne funktionerne:



Vi finder skæringspunkterne med skæringsværktøjet eller skæringskommandoen:



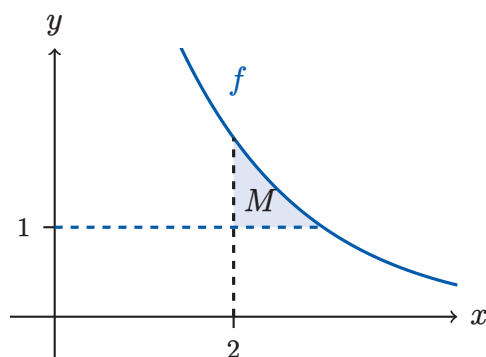
Vi kan se at x -koordinaterne til skæringspunkterne er 1 og 5. Vi kan regne arealet med et integral. Vi skriver: `IntegralMellem(f,g,1,5)`



Vi kan se på tegneblokken at vi har fat i det rigtige areal, og at det har værdien 10,67.

Øvelse 1.6.8

Lad $f(x) = 2 \cdot 0,5^{x-2}$ og betragt punktmængden M :



a) Bestem arealet af M

1.7 Beviser - Integralregning

Beviser til stamfunktioner

Sætning 1.7.1

Lad F være en stamfunktion til f , G en stamfunktion til g og k en konstant. Så gælder:

1. $k \cdot F(x)$ er en stamfunktion til $k \cdot f(x)$
2. $F(x) + G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) + g(x)$
3. $F(x) - G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) - g(x)$

Bevis

Vi viser første regneregul. Se nedenstående øvelse for resten.

Vi husker at en stamfunktion funktion f er en funktion F som opfylder at:

$$F'(x) = f(x)$$

Så skal vi vise at $k \cdot F(x)$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$ skal vi altså vise at:

$$(k \cdot F(x))' = k \cdot f(x)$$

Vi regner $(k \cdot F(x))'$ ved at bruge regnereglen $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$, som vi kender fra differentialregning:

$$\begin{aligned} (k \cdot F(x))' &= k \cdot F'(x) & (\text{Regel: } (k \cdot f(x))' &= k \cdot f'(x)) \\ &= k \cdot f(x) & (\text{Da } F'(x) &= f(x)) \end{aligned}$$

Altså er $(k \cdot F(x))' = k \cdot f(x)$, hvilket var det vi gerne ville vise.

Øvelse 1.7.1

a) Bevis resten af sætning 1.7.1.

Vi lægger godt mærke til resultaterne i sætning 1.7.1 da vi for brug for dem i næste bevis.

Beviser til bestemte integraler

Sætning 1.3.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner, a , b og c reelle tal, og k en konstant. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
3. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$
4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (Indskudsreglen)

Bevis

Regel 1: Vi skal vise at

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Vi udnytter at $k \cdot F(x)$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b k \cdot f(x) dx &= [k \cdot F(x)]_a^b \\ &= k \cdot F(b) - k \cdot F(a) \\ &= k \cdot (F(b) - F(a)) \\ &= k \cdot \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Regel 2: Vi skal vise at

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

Vi udnytter at $F(x) + G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

Regel 3 springer vi over da den bevises som regel 2.

Regel 4 Vi skal vise

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Her er det nemmest at starte med højresiden:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

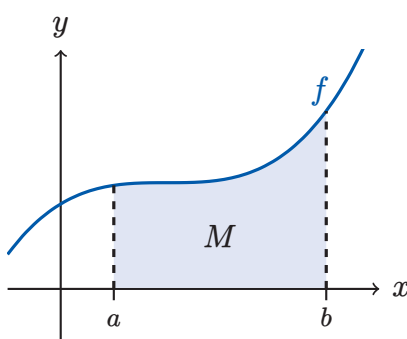
Beviser til arealbestemmelse

Det vigtigste og mest spændende bevis er beviset for hovedsætningen.

Sætning 1.5.1 (Differential- og integralregningens hovedsætning)

Lad f være kontinuert funktion, som er ikke-negativ på intervallet $[a, b]$.

Lad A betegne arealet af området M afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f :

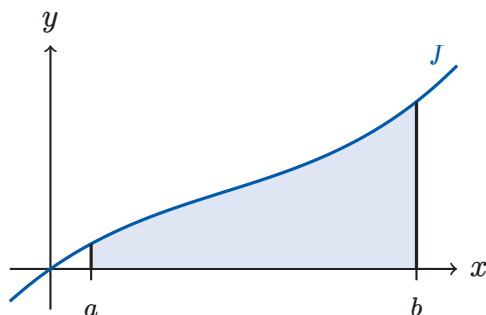


Arealet A er bestemt ved:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Bevis

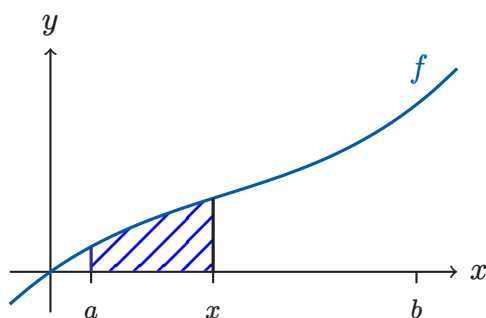
For at gøre beviset nemmere, vil vi antage at f er voksende. Arealet A er arealet af det farvede område:



Beviset er langt, så vi deler det op i to dele.

Del 1: Arealfunktionen

Første del omhandler en funktion, vi kalder *arealfunktionen* og betegner med $A(x)$. Den er defineret ved, at den til ethvert x knytter arealet af området afgrænset af de lodrette linjer gennem a og x , grafen for f og førsteaksen. Arealet $A(x)$ er altså det blå skraverede område:



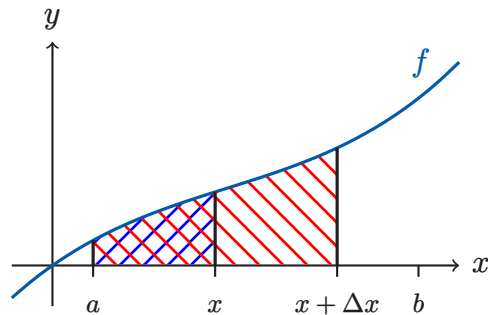
Læg mærke til at der forskel på A og $A(x)$. Bogstavet A bruger vi om arealet omtalt i sætningen, mens $A(x)$ altså er arealfunktionen. Del 1 går ud på at vise at $A(x)$ er stamfunktion til f . Dvs. vi skal vise at $A'(x) = f(x)$. Vi husker at differentialkvotienten er defineret ved:

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

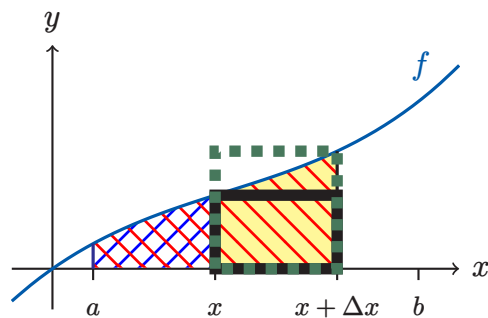
Nu skal vi vise at $A'(x) = f(x)$, så vi skal altså vise at

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Vi vælger nu et Δx , og indtegner arealet $A(x + \Delta x)$ på vores skitse:



Vi har skraveret $A(x + \Delta x)$ med rødt (vi husker at det blå område er $A(x)$). Hvis vi kigger på den del af det røde område, som ikke er blå, må det være givet ved $A(x + \Delta x) - A(x)$. Det er det område vi er interesseret i, og derfor vil vi nu markere det med gult. Vi indtegner også to rektangler på tegningen:



Det sorte rektangel har bredde Δx og højde $f(x)$. Dermed har det arealet $f(x)\Delta x$. Det grønne rektangel har også en bredde på Δx , men højden er $f(x + \Delta x)$. Dermed har det arealet $f(x + \Delta x)\Delta x$. Vi kan se at areal af det gule område ligger i mellem arealerne af de to rektangler. Altså

$$f(x)\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x)\Delta x$$

Vi dividerer nu med Δx :

$$f(x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x).$$

Vi genkender nu udtrykket i midten som at være differenskvotienten. Vi mangler bare at tage grænseværdien, så vi lader $\Delta x \rightarrow 0$. Vi har antaget at f er kontinuert, så derfor må $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$ når $\Delta x \rightarrow 0$. Men differenskvotienten $\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}$ ligger imellem $f(x)$ og $f(x + \Delta x)$, så derfor må den følge med, og også gå mod $f(x)$ når $\Delta x \rightarrow 0$. Altså:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x),$$

hvilket var det vi skulle vise, og vi kan konkludere at $A(x)$ er stamfunktion til f . Vi er hermed færdige med bevisets første del.

Del 2: Arealet A som bestemt integral

I del 2 viser vi sætningens påstand. Altså vi vil bevise at:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Ifølge definitionen af det bestemte integral er

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

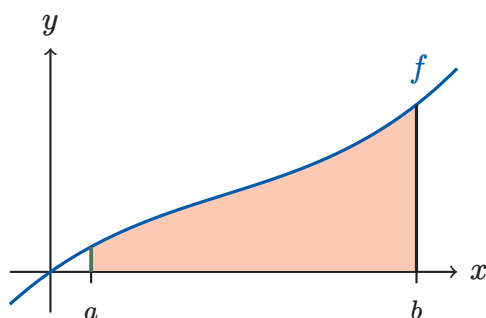
hvor F er hvilken som helst stamfunktion til f . Vi har lige vist at $A(x)$ er en stamfunktion til f , så den må vi kunne bruge som stamfunktion i integralet. Altså:

$$\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a).$$

Vi ser at højresiden er en forskel mellem to arealer. Lad os se nærmere på de to arealer. Arealet $A(b)$ er, ifølge definitionen af arealfunktionen, arealet af området afgrænset af linjerne $x = a$, $x = b$, førsteaksen og f . Det er det areal vi kaldte A i sætningen. Arealet $A(a)$ er, ifølge definitionen af arealfunktionen, arealet af området afgrænset af linjerne $x = a$, $x = a$, førsteaksen og f . Da de to lodrette afgrænsningslinjer ligger oven i hinanden vil området bare være en streg og dermed er $A(a) = 0$. Vi har altså:

$$\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a) = A - 0 = A,$$

hvilket fuldender beviset. For klarhedens skyld har jeg inkluderet en tegning de omtalte arealer. Området med arealet $A(b)$ har jeg farvet pink, mens området med arealet $A(a)$ er grønt:



Øvelse 1.7.2 (♣)

I beviset ovenover har vi (uden at gøre os opmærksom på det) antaget at Δx er positiv.

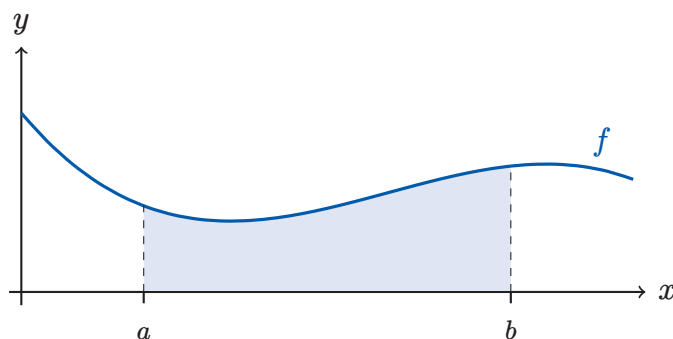
- Gennemfør beviset når Δx er negativ.

Ekstra beviser

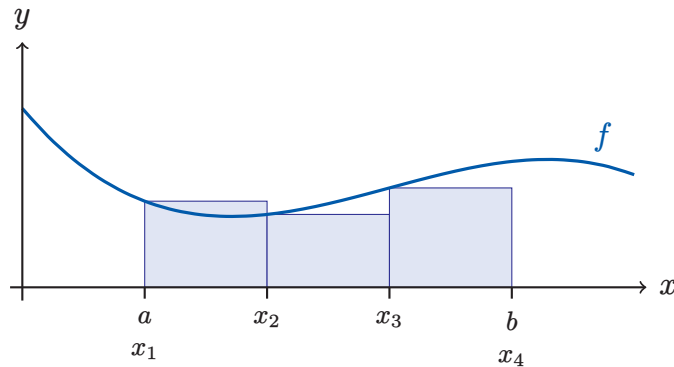
Argument for hovedsætningen

Beviset for hovedsætningen er lidt som de fleste andre beviser. Når beviset er færdig, må man erkende at sætningen må være rigtig, men sætningen fremstår ikke klarere, end inden man lavede beviset. Vi skal nu se argument for hovedsætningen, som ikke er så stringent, men til gengæld får det sætningen til at fremstå mere klart (måske? you tell me).

Vi skal vise at $A = \int_a^b f(x) dx$ og det vil vi gøre ved at kigge på arealet først. Så betragt funktionen f og arealet under f mellem a og b som vist her:



Vi vil nu bestemme dette areal ved at opdele x-aksen i mindre ligestore dele og tegne bokse som vist her:



Vi kan se at det ikke er det helt rigtige areal vi får, men det er klart at arealet af rektanglerne nærmer sig det rigtige areal, hvis vi gør inddelingen finere. Vi regner nu arealet. Kaldet vi boksenes bredde for Δx vil første boks have arealet

$$\text{højde} \cdot \text{bredde} = f(x_1) \cdot \Delta x$$

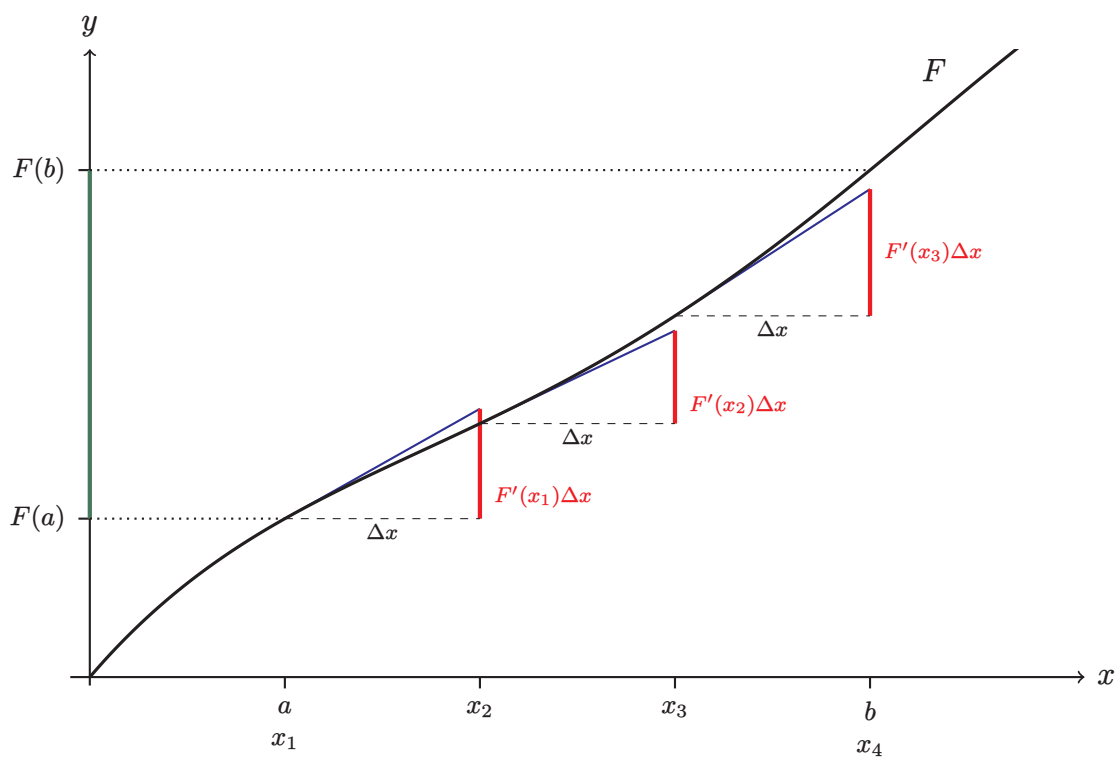
Tilsvarende for de andre bokse. Det samlede areal er altså givet ved:

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$$

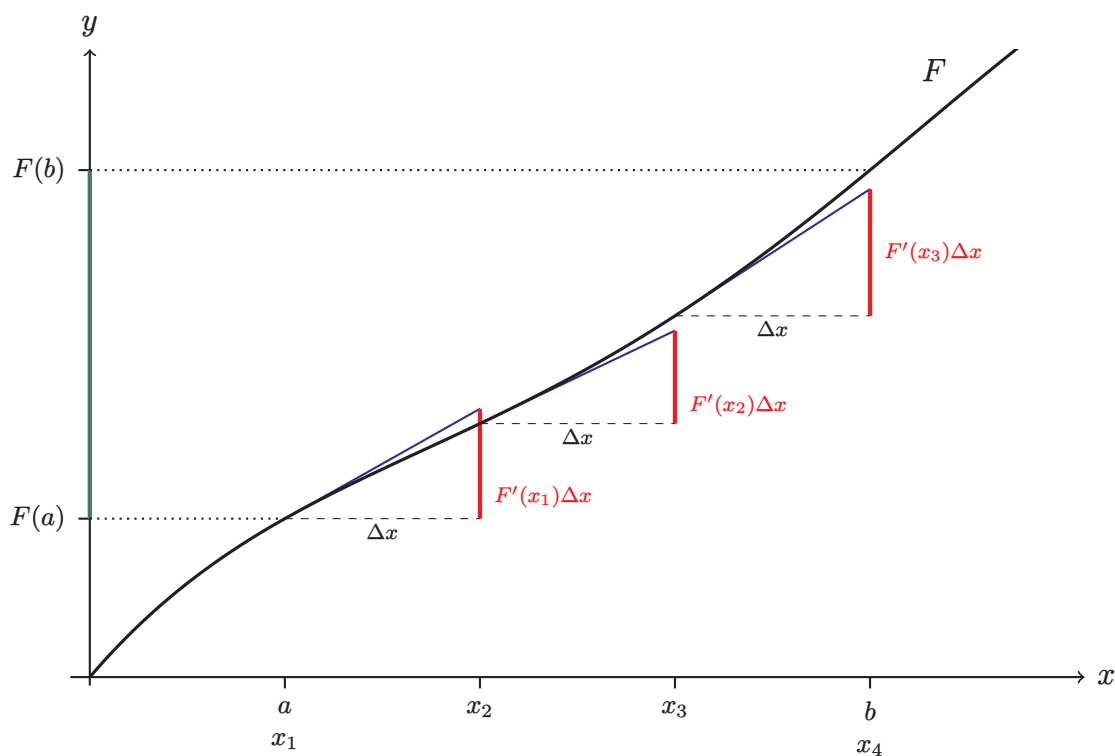
Vi kan udtrykke arealet vha. stamfunktionen F , da $F'(x) = f(x)$:

$$A \approx F'(x_1)\Delta x + F'(x_2)\Delta x + F'(x_3)\Delta x$$

Nu er arealet altså udtrykt ved F . Lad os se hvordan det ser ud på grafen for F . Vi ved at F' udtrykker hældningen på tangenten til F . Ganger vi hældning med Δx får vi tangentens vækst, når x vokser med Δx . Lad os tegne det ind. Vi tegner tangenterne med blå og væksten med rød:



Arealet er altså lig med summen af de røde længder. Vi sammenligner nu summen af de røde længder med $F(b) - F(a)$ som må være afstanden fra $F(a)$ til $F(b)$ langs y -aksen.



Vi ser at den samlede længde af de røde stykker (som udtrykker arealet) giver omtrent det samme som længden af det grønne stykke (som udtrykker $F(b) - F(a)$). Altså

$$A \approx F(b) - F(a)$$

og da $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ må

$$A \approx \int_a^b f(x) dx$$

Når vi skriver " $\approx$ " i stedet for " $=$ " er det pga. de afvigelser der introduceres som konsekvens af inddelingen af x -aksen. Hvis vi gør inddelingen finere er det klart, at afvigelserne bliver mindre. Faktisk er det oplagt at vi kan gøre afvigelserne vilkårligt små ved bare at gøre inddelingen

fin nok. Derfor konkluderer vi at:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Beviser til ubestemte integraler

Vi skal nu bevise nogle simple regneregler for ubestemte integraler. Men inden vi går i gang med de konkrete regler, skal vi se på et generelt princip. Lad os sige at vi vil bevise påstanden

$$\int (\text{udtryk 1}) dx = \text{udtryk 2}.$$

Ifølge definitionen af det ubestemte integral betyder det, at vi skal bevise at udtryk 2 udgør samtlige stamfunktioner til integranden (altså udtryk 1). I praksis vil vi nøjes med at bevise at udtryk 2 er én stamfunktion til integranden. Den eneste forskel på *én* stamfunktion og *samtliche* stamfunktioner er, at udtrykket for samtlige stamfunktioner indeholder en integrationskonstant. I vores tilfælde vil udtryk 2 oplagt indeholde en integrationskonstant, det er bare ikke noget vi vil komme ind på.

Sætning 1.2.1

Lad f og g være kontinuerte funktioner og k en konstant som ikke er nul. Så gælder følgende regneregler:

1. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
2. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
3. $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

Bevis

Vi vil bevise de to første regler.

Regel 1: Vi skal vise at

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Ifølge vores generelle princip om beviser med ubestemte integraler skal vi vise, at højresiden er stamfunktion til integranden. Altså at $k \cdot \int f(x) dx$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$: Vi differentierer $k \cdot \int f(x) dx$

$$\left(k \cdot \int f(x) dx\right)'$$

Vi sætter k ud foran differentiationen.

$$k \cdot \left(\int f(x) dx\right)'$$

Vi husker at ubestemte integraler er stamfunktioner. Så integration og differentiation ophæver hinanden altså har vi:

$$k \cdot f(x)$$

Altså er $k \cdot \int f(x) dx$ er stamfunktion til $k \cdot f(x)$ og vi har vist Regel 1.

Regel 2: Vi skal vise at

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Vi differentierer højresiden:

$$\left(\int f(x) dx + \int g(x) dx\right)'$$

Vi opdeler differentiationen i to:

$$\left(\int f(x) dx\right)' + \left(\int g(x) dx\right)'$$

Differentiation ophæver integration:

$$f(x) + g(x)$$

og vi har altså vist, at $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ er stamfunktion $f(x) + g(x)$, så regel 2 er bevist.

Øvelse 1.7.3

- a) Bevis regel 3 i sætning 1.2.1 (ovenstående sætning).

Øvelse 1.7.4 (✚)

I bemærkningen inden ovenstående bevis står der: ”I vores tilfælde vil udtryk 2 oplagt indeholde en integrationskonstant”

- a) Forklar hvorfor, for hver af de tre regneregler.

Beviser til integration ved substitution

Sætning 1.4.1

Lad f være en kontinuert funktion og g en differentiabel funktion. Så gælder:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

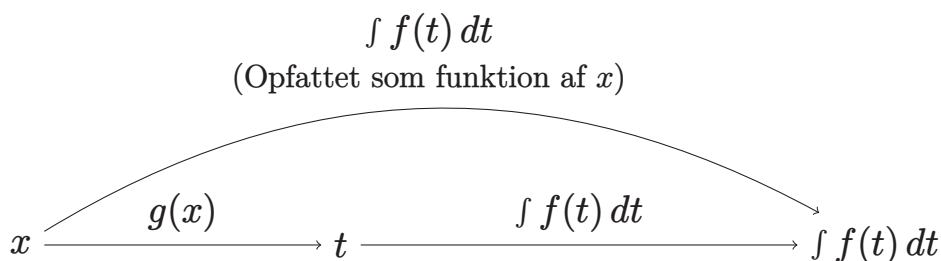
hvor $t = g(x)$.

Bevis

Vi skal vise at

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$$

Vi skal vise at $\int f(t) dt$ er stamfunktion til $f(g(x))g'(x)$, hvilket vil sige, at vi skal differentiere $\int f(t) dt$, og tjekke at det giver $f(g(x))g'(x)$. Men nu skal vi holde tungen lige i munden. Fordi selvom $\int f(t) dt$ ligner en funktion af t , skal den opfattes som en funktion af x , og når vi differentiere den, skal den altså differentieres med hensyn til x . Det betyder at det er en sammensat funktion:



Regnereglen for differentiation af sammensatte funktioner lyder:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Hos os er den ydre funktion $\int f(t) dt$, og den indre funktion er $t = g(x)$. Vi får nu

$$\begin{aligned} \left(\int f(t) dt \right)' &= f(t) \cdot t' \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x), \end{aligned}$$

og vi har hermed vist at $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$. Man kan dog undre over hvorfor jeg ganger med t' ved det første lighedstegn. Burde differentiation og integration ikke gå ud med hinanden? Nej, for

vi differentierer med hensyn til x og integrere med hensyn til t . Først når vi bruger reglen om differentiation af sammensatte funktioner, kan vi differentiere den ydre funktion med hensyn til t , og på det tidspunkt vil differentiation og integration gå ud med hinanden. Men reglen siger så også, at vi skal gange med den indre differentieret, og derfor ganger vi med t' .

Sætning 1.4.2

Lad f være en kontinuert funktion, g en differentiabel funktion og lad a og b være to reelle tal. Så gælder:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt,$$

hvor $t = g(x)$.

Bevis

Ifølge sætningen for substitution for ubestemte integraler gælder følgende:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$$

Her er det underforstået at vi skal indsætte $g(x)$ i stedet for t efter vi har integreret på højresiden. Men det må betyde, at vi kan finde en stamfunktion til $f(g(x))g'(x)$, ved at finde en stamfunktion til $f(t)$, og så indsætte $g(x)$ i stedet for t . Så hvis $F(t)$ er en stamfunktion til $f(t)$, så er $F(g(x))$ en stamfunktion til $f(g(x))g'(x)$. Sætningen er nu nem at vise:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x) dx &= [F(g(x))]_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= [F(x)]_{g(a)}^{g(b)} \end{aligned}$$

Øvelse 1.7.5 (✚)

- a) Bevis de ekstra regneregler i afsnit 1.3.

Kapitel 2

Differentialligninger

Når man vil beskrive problemstillinger, som handler om sammenhængen mellem en funktion og dens vækst, får man en ligning, som både indeholder funktionen og dens differentialkvotient. Den slags ligninger kaldes differentialligninger, og dem skal vi studere nærmere i dette kapitel.

2.1 Introduktion til differentialligninger

En *differentialligning* er en ligning, hvor den ubekendte er en funktion, og som indeholder funktionens differentialkvotient (deraf navnet – differentialligning). Funktionen betegner vi med y og differentialkvotienten skrives dermed som y' .

Eksempel 2.1.1

Betragt ligningen

$$y' = 5.$$

Vi kan se at ligningen indeholder differentialkvotienten y' , og derfor er det en differentialligning.

I ovenstående eksempel står der ikke y nogle steder i ligningen. Men det ændrer ikke på, at det er y der er den ubekendte. Man kan sige at y optræder i ligningen via sin differentialkvotient.

Eksempel 2.1.2

Betragt ligningen

$$y' \cdot x = y + 2x^3.$$

Vi kan se at ligningen indeholder differentialkvotienten y' , og derfor er det en differentialligning. Ligning indeholder også funktionen y og variabelen x .

Øvelse 2.1.1

Bestem hvilke af følgende ligninger som er differentialligninger

- a) $y' = 2$
- b) $3x + y = y'$
- c) $x + 2y = y$
- d) $y = 3$

En *løsning* til en differentialligning er en funktion, der gør ligningen sand, når man sætter funktionens forskrift ind i stedet for y .

Eksempel 2.1.3

Funktionen $f(x) = x^2$ er **ikke** en løsning til differentialligningen $y' = 5$. Det kan vi se, ved at sætte f ind i stedet for y i ligningen. I ligningen optræder differentialkvotienten y' , så vi finder først $f'(x)$. Den giver $f'(x) = 2x$ og den kan vi nu sætte ind i ligningen:

$$\begin{array}{ll} y' = 5 & \text{(Vores oprindelige ligning)} \\ 2x = 5 & \text{(Vi har indsat } f'(x) \text{ i stedet for } y') \end{array}$$

Vi kan se at f ikke er en løsning, da ligningen er falsk (der står ikke det samme på hver side af lighedstegnet).

Vi vil nu prøve om funktionen $g(x) = 5x + 1$ er en løsning til differentialligningen. Vi finder først differentialkvotienten $g'(x) = 5$. Vi sætter nu ind i ligningen.

$$\begin{array}{ll} y' = 5 & \text{(Vores oprindelige ligning)} \\ 5 = 5 & \text{(Vi har indsat } g'(x) \text{ i stedet for } y') \end{array}$$

Vi kan se at g er løsning til differentialligningen, da ligningen er sand (der står det samme på begge sider).

Øvelse 2.1.2

Bestem hvilke af følgende funktioner som er løsning til differentialligningen $y' = 2x$

- a) $f(x) = 2$
- b) $f(x) = x^2 + 1$
- c) $f(x) = x^2 - x$

d) $f(x) = x^2$

Eksempel 2.1.4

Vi vil nu undersøge om funktionen $f(x) = x^3 - 3x$ er en løsning til ligningen $y' \cdot x = y + 2x^3$. Vi finder først differentialkvotienten $f'(x) = 3x^2 - 3$, hvorefter vi indsætter f og f' i ligningen:

$$\begin{aligned} y' \cdot x &= y + 2x^3 && \text{(Oprindelige ligning)} \\ (3x^2 - 3) \cdot x &= x^3 - 3x + 2x^3 && \text{(Indsat } f \text{ for } y \text{ og } f' \text{ for } y') \\ 3x^3 - 3x &= 3x^3 - 3x && \text{(Reduceret)} \end{aligned}$$

Vi kan se at ligningen er sand og vi kan dermed konkludere at $f(x) = x^3 - 3x$ er løsning til ligningen $y' \cdot x = y + 2x^3$.

Øvelse 2.1.3

Tjek om:

- a) $f(x) = x^2 + 3x$ er løsning til $y' \cdot x = x^2 + y$
- b) $f(x) = \ln(x)$ er løsning til $x \ln(x) = (y' + y)x - 1$
- c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ er løsning til $y' - y + x^3 = 6x$
- d) $f(x) = e^{3x}$ er løsning til $y^2 - e^{6x} + y' = 3y$

Eksempel 2.1.5

Vi vil bestemme konstanten c således at funktion

$$f(x) = x^2 + c \cdot x$$

er løsning til differentialligningen

$$y' - 2 = 2x + 1.$$

Vi regner først f' :

$$f'(x) = 2x + c.$$

Vi indsætter nu i ligningen og isolerer c :

$$\begin{array}{ll} y' - 2 = 2x + 1 & \text{(Oprindelige ligning)} \\ 2x + c - 2 = 2x + 1 & \text{(Indsat } f' \text{ for } y') \\ c = 3 & \text{(Isoleret } c) \end{array}$$

Vi konkluderer, at hvis $c = 3$, så er $f(x) = x^2 + c \cdot x$ løsning til $y' - 2 = 2x + 1$.

Øvelse 2.1.4

Lad $f(x) = x^2 + 5x + k$.

- a) Bestem konstanten k så f er løsning til differentialligningen:
 $y' - 2y = -2x^2 - 8x - 1$.

Øvelse 2.1.5

Betragt ligningen $2y' = -a(y - x) + 2$

- a) Bestem a så funktionen $f(x) = e^{4x} + x$ er løsning til ligningen.

Øvelse 2.1.6

Gør rede for at:

- a) $f(x) = x \cdot e^x$ er løsning til $x(y' - y) = y$
b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ er løsning til $\frac{x}{y} = y'$

Der er flere måder at opskrive den samme ligning på. Følgende variationer er mulige:

- Den ubekendte kaldes $f(x)$ i stedet for y .

- Differentialkvotienten skrives som $\frac{dy}{dx}$ i stedet for y' .
- Løsningen betegnes med y i stedet for $f(x)$.

Eksempel 2.1.6

Differentialligningen $y' \cdot x = y + 2x^3$ kan skrives på følgende måder:

$$\begin{aligned}y' \cdot x &= y + 2x^3 \\f'(x) \cdot x &= f(x) + 2x^3 \\ \frac{dy}{dx} \cdot x &= y + 2x^3\end{aligned}$$

Løsningen (tjek selv at rent faktisk er en løsning) kan skrives som

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \text{eller} \quad y = x^3 - 3x$$

Om differentialligningen, eller løsningen, står på den ene eller den anden måde har selvfølgelig ingen betydning for, hvordan man regner på ligningen.

Øvelse 2.1.7

Gør rede for at:

- $f(x) = x^3 + x^2$ er løsning til $2\frac{dy}{dx} - 6x^2 = 4x$
- $y = x^2$ er løsning til $y' = 2x$
- $f(x) = e^x$ er løsning til $f(x) = f'(x)$

Ekstra

Differentialligninger kan også indeholde den dobbelt afledte. Så kaldes det en *andenordens differentialligning*. Den type ligninger møder man

meget ofte i fysik (sikkert også i økonomi). De kan være svære at løse

Øvelse 2.1.8

Lad $f(x) = e^{2x} - 4e^{-3x}$

a) Gør rede for at f er løsning til $y'' + y' = 6y$

2.2 Bestemmelse af løsninger

I sidste afsnit så vi, hvordan man undersøger om en funktion er løsning til en givet differentialligning. I dette afsnit skal vi se på, hvordan man *løser* en differentialligning. Altså hvordan man selv finder løsningen.

Fuldstændige og partikulære løsninger

Betragt differentialligningen

$$y' = 2x.$$

Ligningen udtrykker, at y er en stamfunktion til $2x$, så derfor kan vi hurtigt se, at $f(x) = x^2$ er en løsning til ligningen. Men hvad med funktionen $g(x) = x^2 + 7$? Den opfylder også ligningen og derfor er den også en løsning. Fra integralregning ved vi at samtlige løsninger til ligningen har formen $y = x^2 + c$, hvor c er en arbitrær konstant. Vi kalder løsningerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + 7$ for *partikulærer løsninger* og løsningen $y = x^2 + c$ for den *fuldstændige løsning*. Så de partikulære løsninger er konkrete løsninger, mens at den fuldstændige løsning er en generel løsning, som viser hvilken form de partikulære løsninger har.

Øvelse 2.2.1

Betragt differentialligningen $y' = 3$

- Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.
- Bestem to forskellige partikulære løsninger til differentialligningen

Fuldstændig løsning ved tabelopslag

Betragt ligningen

$$y' = y + 1$$

Skal vi løse den, skal vi finde en funktion, som giver sig selv plus en, når man differentierer den. Hvad kunne det mon være? Selvom ligningen er meget simpel er det svært at se, hvad løsningen er. Heldigvis skal vi kun lære at løse differentialligninger på nogle helt bestemte former. For hver form kan vi så finde den fuldstændige løsning i en tabel:

Ligning	Løsning	
$y' = h(x)$	$y = \int h(x) dx$	
$y' = h(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$	Separation af de variable
$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{k \cdot x}$	Eksponentiel vækst
$y' = b - a \cdot y$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$	
$y' = a \cdot y(M - y)$	$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$	Logistisk vækst

Tabel 2.1: Løsningsformler for differentialligninger

Tabellen findes også i formelsamlingen, men uden den sidste række. Vi kan se, at nogle af ligningerne har et specielt navn, og disse vil vi vende tilbage til senere.

Eksempel 2.2.1

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til ligningen $y' = 3y$. Ligningen har formen $y' = k \cdot y$ og ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y = c \cdot e^{k \cdot x}$$

I vores tilfælde er $k = 3$, så vi får løsningen

$$y = c \cdot e^{3x}$$

Øvelse 2.2.2

Bestem ved hjælp af tabellen den fuldstændige løsning til differentiaalligningerne:

a) $y' = 5y$

b) $y' = 2 - 3 \cdot y$

c) $y' = 4y(100 - y)$

d) $y' = \ln(x) + 1$

Nogle gange skal man omskrive ligningen lidt for at kunne genkende den i tabellen.

Eksempel 2.2.2

Vi vil finde den fuldstændige løsning til ligningen $y' = 4 + 5y$. Vi kan skrive ligningen som $y' = 4 - (-5)y$, så den har form som $y' = b - a \cdot y$ med $b = 4$ og $a = -5$. Ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Vi indsætter $b = 4$ og $a = -5$:

$$y = \frac{4}{-5} + c \cdot e^{-(-5)x}$$

og reducerer

$$y = -\frac{4}{5} + c \cdot e^{5x}$$

Øvelse 2.2.3

Bestem den fuldstændige løsning til ligningerne:

a) $y' = 3 + 2y$

b) $2y' = y$

c) $y' + x = 0$

Partikulær løsning ved tabelopslag

Partikulære løsninger opstår når der kommer krav til løsningen – som regel i form af et punkt løsningen skal gå igennem.

Eksempel 2.2.3

Betragt differentialligningen

$$y' = 3x^2.$$

Vi vil bestemme den løsning f , som opfylder at $f(1) = 5$.

Vi finder først den fuldstændige løsning ved finde ligningen i tabellen. Ligningen har form som $y' = h(x)$, med $h(x) = 3x^2$, og ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y = \int h(x) dx$$

Vi indsætter forskriften for $h(x)$ og integrerer

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + c,$$

og den fuldstændige løsning er altså:

$$y = x^3 + c.$$

Vi vil nu finde den partikulære løsning, som opfylder at $f(1) = 5$. Altså når $x = 1$ skal $y = 5$. Det kan vi indsætte i den fuldstændige løsning:

$$5 = 1^3 + c$$

Vi isolerer c og får $c = 4$. Så vores endelige løsning er

$$f(x) = x^3 + 4$$

Kravet $f(1) = 5$ kan også formuleres som at "f går igennem punktet $(1, 5)$ ".

Øvelse 2.2.4

Betragt differentiaalligningen $y' = 2x - 1$.

- a) Bestem den partikulære løsning til som går igennem punktet $(3, 4)$.

Eksempel 2.2.4

Betragt differentiaalligningen

$$y' = 6 + 3y.$$

Vi vil nu finde den løsning f som går igennem punktet $(0, 1)$.

Vi starter igen med at finde den fuldstændige løsning i tabellen. Vores ligning har form som $y' = b - a \cdot y$, hvor $a = -3$ og $b = 6$.

Ifølge tabellen er den fuldstændige løsning givet ved:

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}.$$

Vi indsætter værdierne for a og b :

$$y = \frac{6}{-3} + c \cdot e^{-(-3) \cdot x},$$

og reducerer for så at få den fuldstændige løsning:

$$y = c \cdot e^{3x} - 2.$$

Vi indsætter punktet $(0, 1)$:

$$1 = c \cdot e^{3 \cdot 0} - 2,$$

og reducerer:

$$1 = c - 2.$$

Vi isolerer c og får

$$c = 3,$$

og vores endelige løsning er dermed:

$$f(x) = 3 \cdot e^{3x} - 2$$

Metoden i det ovenstående eksempel bruges når ligningerne har form som de 3 nederste rækker i tabellen. Det eneste som ændrer sig er at man får forskellig type af ligninger når man skal isolere c . Separation af de variable skal vi se nærmere på i det næste afsnit.

Øvelse 2.2.5

Bestem

- a) den partikulære løsning til ligningen $y' = 7y$, som opfylder $f(0) = 3$.
- b) den partikulære løsning til ligningen $y' = 2y(400 - y)$, som går igennem punktet $(0, 100)$.

Øvelse 2.2.6 (✚)

Bestem den partikulære løsning til ligningen...

- a) $\frac{dy}{dx} = 3y$, som opfylder $f(0) = 10$.
- b) $y' - 9 = y$, som går igennem punktet $(0, 2)$.
- c) $y' = (4x + 8)^{10}$, som opfylder $f(-2) = 0$.
- d) $y' = -2y^2 + 20y$, som går igennem punktet $(0, 6)$

2.3 Separation af de variable

Separation af de variable er en metode, man kan bruge til at løse differentialligninger på formen

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

Fuldstændige løsninger ved separation

Ligesom man kan lave integration ved substitution på to måder, med en teknik eller en formel, så kan man tilsvarende lave separation af de variable med en teknik eller en formel. Vi vil først se på "teknikken".

Eksempel 2.3.1

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Vi ser at ligningen har form som $y' = h(x) \cdot g(y)$ og derfor kan vi bruge metoden separation af de variable til at finde den fuldstændige løsning. Vi starter med at omdøbe differentialkvotienten til $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}$$

Tricket er nu, at samle alt det som har med x at gøre på den ene side, og alt det som har med y at gøre på den anden. Vi starter med at gange med $3y^2$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x,$$

hvorefter vi nu ganger med dx på begge sider (her "leger" vi altså også at differentialkvotienten er en brøk):

$$3y^2 dy = 2x dx$$

Vi har nu separeret variablene, dvs. alt med y er på den ene side af lighedstegnet og alt med x er på den anden. Vi integrerer på begge sider:

$$\int 3y^2 dy = \int 2x dx,$$

hvilket giver

$$y^3 + c_1 = x^2 + c_2$$

Vi trækker c_1 fra på begge sider:

$$y^3 = x^2 + c_2 - c_1,$$

og samler de to konstant i en $c = c_2 - c_1$:

$$y^3 = x^2 + c$$

Vi tager nu den tredje rod på begge sider:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Normalt vil man ikke skrive så mange detaljer som i ovenstående eksempel. Man bliver hurtigt træt af at først skrive de to konstanter c_1 og c_2 for så senere at samle dem som en enkelt konstant c . Hvorfor ikke bare starte med en enkelt konstant? Vi kan også finde på at gøre flere ting på en gang når vi separere variablene. Ville vi skrive eksemplet mere kompakt, kunne det altså se således ud:

Eksempel 2.3.2

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Vi bruger separation af de variable. Vi har:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}$$

Vi ganger med $3y^2$ og dx på begge sider og integrerer:

$$\int 3y^2 dy = \int 2x dx,$$

hvilket giver

$$y^3 = x^2 + c$$

Vi tager nu den tredje rod på begge sider:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Øvelse 2.3.1

- a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen

$$y' = 2x \cdot y^2$$

Metoden har de nogle af de samme problemer som substitutionsmetoden vi så i afsnittet om integration ved substitution (vi behandler dx og dy som størrelser vi kan regne på). Det er ikke noget man som almindelig elev behøver at bekymre sig om, men hvis man er generet af argumentationen i eksemplerne, så kan man vælge at bruge en formel i stedet for:

Eksempel 2.3.3

Vi vil igen bestemme den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}, \quad y \neq 0$$

Denne gang vil vi bruge en formel. Ligningen har form som $y' = h(x) \cdot g(y)$, med $h(x) = 2x$ og $g(y) = \frac{1}{3y^2}$. Ved tabelopslag ses, at den fuldstændige løsning givet ved

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Vi indsætter forskrifterne for g og h i formelen

$$\int \frac{1}{\frac{1}{3y^2}} dy = \int 2x dx,$$

og reducerer (I kan vel jeres brøkregneregler, right?)

$$\int 3y^2 dy = \int 2x dx,$$

Vi integrerer og får:

$$y^3 = x^2 + c,$$

hvilket giver:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Man bestemmer selv om man bruger teknikken eller formelen, men i det efterfølgende vil jeg tage udgangspunkt i formelen.

Øvelse 2.3.2

- a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen $y' = e^x \cdot e^{-y}$. Brug formelen, hvis du kan.

Nogle gange skal man omskrive ligningen lidt for at kunne bruge formelen.

Eksempel 2.3.4

Vi vil finde den fuldstændige løsning til ligningen:

$$y' = \frac{2x}{3y^2}$$

Vi omskriver ligningen så den har formen $y' = h(x) \cdot g(y)$:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2}$$

Vi genkender nu ligningen fra eksempel 2.3.3, så resten kan regnes som i eksempel 2.3.3.

Øvelse 2.3.3

- a) Regn ovenstående eksempel færdigt. Hvis det er helt klart for dig, hvordan det skal gøres, så spring øvelsen over.

Øvelse 2.3.4

a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen $y'e^{2y} = 3x$

For at kunne bruge formelen for separation af de variable er det nødvendigt at ligningen har formen $y' = h(x) \cdot g(y)$, men der er ingen som siger at $h(x)$ eller $g(y)$ ikke må være konstante funktioner.

Eksempel 2.3.5

Vi vil finde den fuldstændige løsning til ligningen $y' = \sqrt{y}$. Vi ser at ligningen har form som $y' = h(x) \cdot g(y)$ med $h(x) = 1$ og $g(y) = \sqrt{y}$. Løsningen er givet ved:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Vi indsætter $h(x)$ og $g(y)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int 1 dx.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$ kan vi skrive det som

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int 1 dx.$$

Vi integrere

$$\frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} y^{-\frac{1}{2} + 1} = x + c$$

Vi reducerer

$$2y^{\frac{1}{2}} = x + c$$

Det er det samme som at

$$2\sqrt{y} = x + c$$

Så det må betyde at

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c\right)^2$$

Da c kan være hvad som helst, er der ingen grund til at skrive $\frac{1}{2}c$. Vi kan bare skrive c . Så får vi

$$y = \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2$$

Partikulære løsninger ved separation

I udgangspunktet er der ikke noget nyt her. Skal man finde en partikulær løsning, starter man med en fuldstændig løsning, hvorefter man udnytter, at funktionen skal opfylde noget bestemt:

Eksempel 2.3.6

Betragt differentialligningen

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

Vi vil nu bestemme den løsning f som opfylder $f(4) = 2$. Vi bruger formelen for separation af de variable og får

$$\int \frac{1}{\frac{1}{3y^2}} dy = \int 2x dx,$$

og reducerer:

$$\int 3y^2 dy = \int 2x dx,$$

hvilket giver

$$y^3 = x^2 + c$$

Vi tager nu den tredje rod på begge sider:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

Vi skal nu bestemme c . Det er nemmest at tage udgangspunkt i mellemregningen $y^3 = x^2 + c$. Da $f(4) = 2$ kan vi indsætte $x = 4$ og $y = 2$ i ligningen.

$$2^3 = 4^2 + c,$$

hvilket giver $c = -8$ Altså er vores partikulære løsning givet ved:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8}$$

Øvelse 2.3.5

Lad:

$$y^{-2}y' = x \quad , \quad y > 0$$

- a) Bestem den fuldstændige løsning.
- b) Bestem den partikulære løsning som går igennem punktet $(2, 1)$

Desværre kan det godt være lidt mere kompliceret at finde den rigtige partikulære løsning, da vi kan risikere at få flere muligheder når vi bestemmer den fuldstændige løsning:

Eksempel 2.3.7

Betragt ligningen

$$y' = \frac{x^2}{2y} \quad , \quad y < 0$$

Vi vil gerne finde den partikulære løsning som opfylder $f(3) = -5$. Vi omskriver først ligningen så den har form som et produkt:

$$y' = x^2 \cdot \frac{1}{2y}.$$

Vi bruger formelen for separation af de variable og får

$$\int \frac{1}{\frac{1}{2y}} dy = \int x^2 dx,$$

og reducerer:

$$\int 2y \, dy = \int x^2 \, dx,$$

Vi integrerer:

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

hvilket giver:

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + c}.$$

Vi kan se at der er to muligheder for y . Den er enten positiv eller negativ. I selve differentialligningen har vi forudsat at $y < 0$, så det er altså den negative løsning vi skal have fat i.

$$y = -\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + c}.$$

Vi indsætter nu punktet $x = 3$ og $y = -5$ i ligningen $y^2 = \frac{1}{3}x^3 + c$:

$$(-5)^2 = \frac{1}{3}3^3 + c,$$

og reducerer:

$$25 = 9 + c,$$

Det ses at $c = 16$, så vi har altså:

$$f(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 16}.$$

I eksemplet ovenover har vi forudsat at $y < 0$ og derfor ved vi vi skal have den negative løsning. Men vi kunne også se dette ud fra kravet $f(3) = -5$. Her ser vi nemlig at vi skal have en negativ y -værdi når $x = 3$. Det kan vi kun få med den negative løsning.

Øvelse 2.3.6

Betragt differentialligningen

$$y' = \frac{e^x}{y}$$

a) Bestem den partikulære løsning som opfylder $f(0) = -4$

Eksempel 2.3.8

Betragt ligningen

$$y' = x^2 \cdot y, \quad y \neq 0$$

Vi vil bestemme den partikulære løsning, hvis graf går igennem punktet $(0, 1)$. Vi benytter separation af de variable:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$$

Vi indsætter i formelen for separation af de variable

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx.$$

Vi slår stamfunktionerne op og får

$$\ln |y| = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Vi bruger den naturlige eksponentialfunktion på begge sider:

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + c},$$

hvilket må betyde at

$$y = \pm e^{\frac{1}{3}x^3 + c},$$

Vi har ikke forudsat noget om hvorvidt y er positiv eller negativ, men da grafen skal gå igennem punktet $(0, 1)$ er det kun den positive løsning der duer:

$$y = e^{\frac{1}{3}x^3 + c}.$$

Vi indsætter nu punktet $(0, 1)$ i ligningen $\ln |y| = \frac{1}{3}x^3 + c$

$$\ln |1| = \frac{1}{3}0^3 + c,$$

hvoraf vi kan se, at $c = 0$. Vi har derved vores partikulære løsning:

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

Øvelse 2.3.7

Betragt ligningen

$$y' = (y + 5)(x + 2)$$

- a) Bestem den partikulære løsning som opfylder $f(0) = 1$
- b) Bestem den partikulære løsning som opfylder $f(0) = -1$

Øvelse 2.3.8

Find den partikulære løsning til...

- a) ligningen: $y' = \frac{6x^2}{y}$, hvor $f(2) = -4$
- b) ligningen: $y' = 4 - y$, hvor f skal gå igennem $(0, -7)$
- c) ligningen: $y' = 4x\sqrt{y}$, hvor $f(1) = 4$

Ekstra

Der er en detalje, jeg har sprunget over. Når man løser en differential-ligning, bør man også angive definitionsområdet, og den skal være et åbent interval. Mere præcist, skal definitionsområdet være det størst mulige interval, som indeholder det punkt (eller de punkter), som løsningen kræves at gå igennem. Både ligningen og løsningen skal være defineret i hele intervallet.

Eksempel 2.3.9

Vi vil bestemme definitionsområdet for løsningen i eksempel 2.3.6. Vi har ligningen:

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{3y^2} \quad , \quad y \neq 0$$

og vi fandt løsningen:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8}$$

Vores ligning er ikke defineret i $y = 0$, hvilket betyder at løsningen heller ikke er defineret når $y = 0$. For at finde det sted sætter vi $f(x) = 0$

$$\sqrt[3]{x^2 - 8} = 0$$

En rod er nul når indmaden er nul, så:

$$x^2 - 8 = 0$$

Dvs.

$$x = \pm\sqrt{8}$$

Altså er løsningen ikke defineret i $x = \pm\sqrt{8}$. Hvis definitionsområdet skal være et interval giver det altså tre mulige definitionsområder.

1. $\text{Dm}(f) =] - \infty, -\sqrt{8}[$

$$2. \text{Dm}(f) =] - \sqrt{8}, \sqrt{8}[$$

$$3. \text{Dm}(f) =]\sqrt{8}, \infty[$$

Vi husker at løsningen skulle opfylde $f(4) = 2$, så derfor skal 4 ligge i definitionsmængden. Altså er definitionsmængden:

$$\text{Dm}(f) =]\sqrt{8}, \infty[$$

Alt i alt skriver vi facit som:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8} \quad , \quad x > \sqrt{8}$$

Øvelse 2.3.9

Find den partikulære løsning, inklusiv definitionsmængde, til...

a) ligningen: $y' = \frac{6x^2}{y}$, hvor $f(2) = -4$

b) ligningen: $y' = 4 - y$, hvor f skal gå igennem $(0, -7)$

c) ligningen: $y' = 4x\sqrt{y}$, hvor $f(1) = 4$

d) ligningen: $y' = \frac{-2xy}{1-x^2}$, hvor f skal gå igennem $(0, 1)$

2.4 Linjelementer og retningsfelter

Skal vi løse en differentialligning, skal den have en bestemt form. Har den ikke form som ligningerne i tabel 2.1, så kan vi kun løse den med CAS. Der findes selvfølgelig mere avancerede tabeller og metoder, men der findes faktisk simple differentialligninger, som der ikke lige er formel for. I dette afsnit skal vi se på en metode, man vi bruge til at blive klogere på løsninger, for de ligninger vi ikke umiddelbart kan løse.

Løsningskurver

I de fuldstændige løsninger optræder der altid konstanter. Det betyder at der er uendelige mange løsninger til den tilhørende ligning, og at vi til ethvert punkt kan finde en partikulær løsning, hvis graf går igennem netop det punkt. En graf for en partikulær løsning til en givet differentiaalligning kaldes en *løsningskurve*, eller en *integralkurve*.

Eksempel 2.4.1

Betragt differentiaalligningen:

$$y' = 2x$$

Det er nemt at se, at den fuldstændige løsning er:

$$y = x^2 + c$$

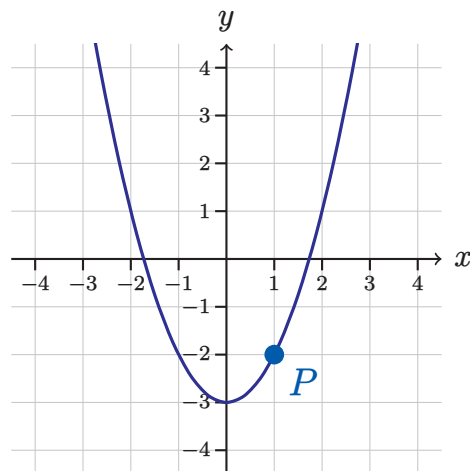
Vi vil nu tegne en løsningskurve igennem punktet $P(1, -2)$. Vi indsætter punktet i den fuldstændige løsning:

$$-2 = 1^2 + c$$

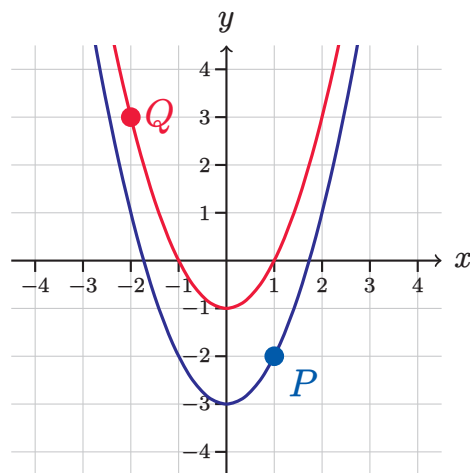
Vi ser at $c = -3$, så løsningskurven igennem punktet $P(1, -2)$ er altså grafen for den partikulære løsning

$$f(x) = x^2 - 3$$

Vi tegner løsningskurven:



Der er ikke noget specielt ved punkt P . Vi kunne have valgt et hvilket som helst andet punkt, f.eks. $Q(-2, 3)$. Det ville give os løsningskurven:



Eftersom der til ethvert punkt findes en løsningskurve gennem netop det punkt, så ville koordinatsystem blive malet sort, hvis vi prøvede at tegne alle løsninger.

Øvelse 2.4.1

Betragt ligning $y' = \frac{1}{5}y$

- a) Bestem den fuldstændige løsning som du har lært i de forgående afsnit.
- b) Tegn løsningskurven gennem punktet $P(0, 2)$. Altså bare i GeoGebra.

Linjeelementer

Vi skal nu se på en metode som kan bruges til at skitsere integralkurver for differentialligninger som har formen

$$y' = f(x, y)$$

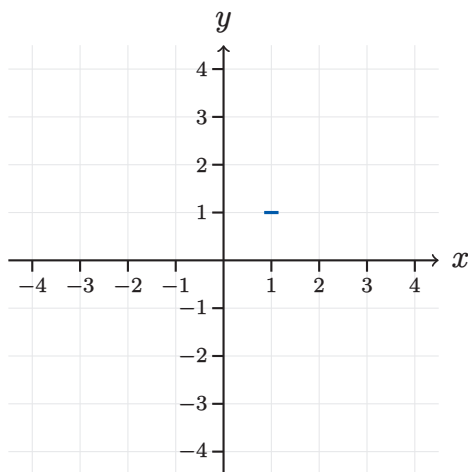
Dvs. ligninger som har y' på den ene side og noget som kun afhænger af x og y på den anden. Et eksempel på dette er ligningen

$$y' = x - y$$

Ligningen har ikke form som nogle af dem i tabel 2.1, og vi kan derfor ikke løse den med tabellen. Men fordi y' står isoleret i ligningen, kan vi bruge ligningen til at finde tangenthældninger (vi husker at differentialkvotienten er tangentens hældning). Vi vælger et tilfældigt punkt $(1, 1)$ og beregner hældningen i det punkt:

$$y' = x - y = 1 - 1 = 0$$

Dvs. den løsningskurve, som går igennem punktet $(1, 1)$, har hældningen på 0. Det kan vi illustrere med et lille vandret linjestykke, som går igennem $(1, 1)$;



Vi kalder det lille linjestykke for et linjeelement, og vi skriver det som $(1, 1; 0)$. De to 1-taller er punktets koordinater, og 0 er tangentens hældning. For en vilkårlig funktion f og et vilkårligt punkt $P(x_0, y_0)$ med $f'(x_0) = a$, skriver vi linjeelementet gennem punktet P som $(x_0, y_0; a)$.

Øvelse 2.4.2

Betragt differentiaalligningen $y' = x^2 \cdot y$

- Bestem linjeelementet igennem punktet $P(-2, 2)$
- Tegn linjeelementet

Eksempel 2.4.2

Vi vil bestemme linjeelementet for differentiaalligningen $y' = 2^y$ igennem punktet $(3, 1)$. Vi skal indsætte 3 i stedet for x og 1 i stedet for y i ligningen. Men der er slet ikke noget x i ligningen, så det er kun y vi erstatter:

$$y' = 2^1 = 2$$

Altså er linjeelementet $(3, 1; 2)$.

Øvelse 2.4.3

Betragt differentiaalligningen $y' = \ln(x^3 - 7)$

- a) Bestem linjeelementet igennem punktet $P(2, -3)$

Eksempel 2.4.3

Vi vil bestemme linjeelementet gennem punktet $(-1, 2)$ for funktionen

$$f(x) = x^4 + 2.$$

Vi finder først $f'(x)$

$$f'(x) = 4x^3$$

Vi indsætter nu -1 for at bestemme linjeelementets hældning:

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$$

Vi konkluderer at linjeelementet er $(-1, 2; -4)$

Øvelse 2.4.4

Lad $f(x) = 2\sqrt{x}$.

- a) Bestem linjeelementet gennem punktet $Q(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$.

Eksempel 2.4.4

Et linjeelement for en funktion f er givet ved $(5, 2; 3)$. Vi vil bestemme en ligning for tangenten gennem punktet $(5, f(5))$. Ud fra linjeelementet kan vi se at tangenten går igennem punktet $(5, 2)$ og har en hældning på 3. Da tangenten er en lineær funktion må den have forskriften

$$y = ax + b.$$

Vi indsætter hældning:

$$y = 3x + b,$$

og vi udnytter nu at tangenten går igennem punktet $(5, 2)$:

$$2 = 3 \cdot 5 + b.$$

Vi isolerer b :

$$b = -13,$$

og tangentens ligning bliver dermed:

$$y = 3x - 13$$

Alternativt kunne vi have indsat i tangentens ligning fra formelsamlingen.

Øvelse 2.4.5

Et linjeelement for en funktion f er givet ved $(-3, 2; 4)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten gennem punktet $(-3, f(-3))$.

Øvelse 2.4.6

Kig på igen på eksempel 2.4.4.

- a) Regn tangenten fra eksemplet, men denne gang så find den ved at indsætte i tangentens ligning fra formelsamlingen, dvs. formel (39).

Øvelse 2.4.7

Betragt differentialligningen $y' = \frac{8}{x+y}$. Lad f være integralkurven gennem $P(5, -1)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til f gennem punktet P .

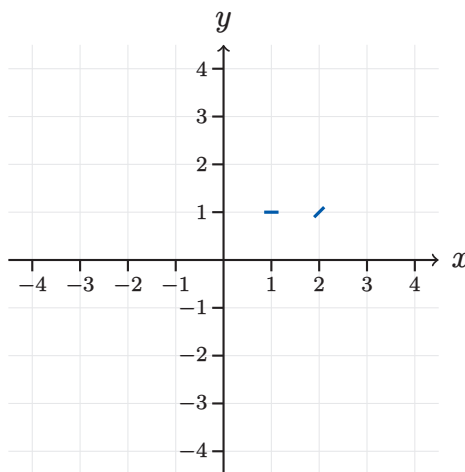
Øvelse 2.4.8

Betragt differentialligningen $y' = 3^{x-3} - y$. Lad f være en løsningskurve til differentialligningen gennem punktet $P(4, f(4))$. Antag at f har en tangent med en hældning på 3 i punktet P .

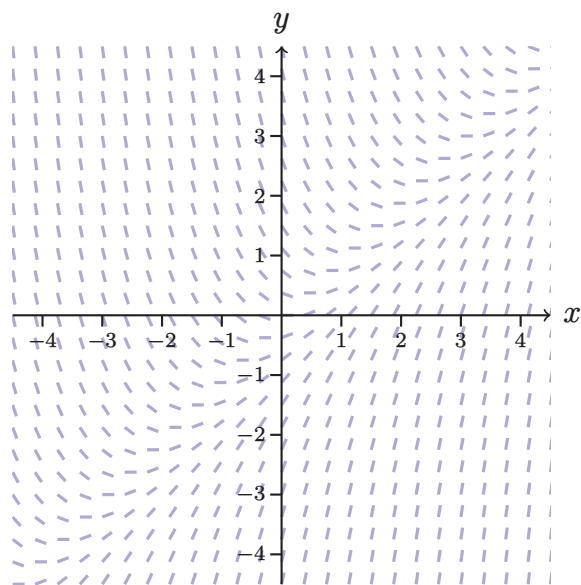
- a) Bestem linjeelementet gennem P .
- b) Bestem en ligning for tangenten for f i punktet P .

Retningsfelter

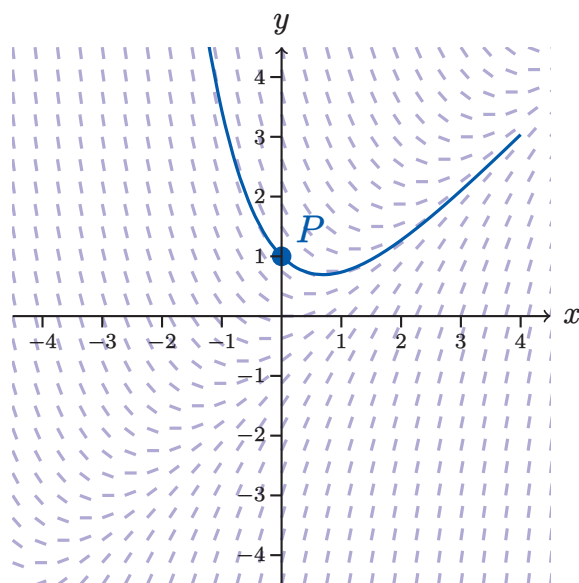
Vi vender nu tilbage til ligningen $y' = x - y$ og vores linjeelement gennem $(1, 1)$. Et enkelt linjeelement kan ikke bruges til ret meget, så vi tegner et til. Denne gang igennem $(2, 1)$:



Sådan bliver vi ved indtil vi har linjeelementer overalt i koordinatsystemet:



Nu har vi det vi kalder for et *retningsfelt*. Ved at følge linjeelementerne i retningsfeltet, kan vi nu se hvordan løsningskurverne ser ud. Vi kan f.eks. tegne en løsningskurve gennem $P(0, 1)$



Fordi løsningskurven typisk ligger mellem linjeelementerne, er det svært at vide præcis, hvor den skal ligge. Man skal prøve at vælge en hældning, der svarer til et kompromis mellem de omgivende linjeelementer. Alternativt kan man tilføje flere linjeelementer tættere på kurven.

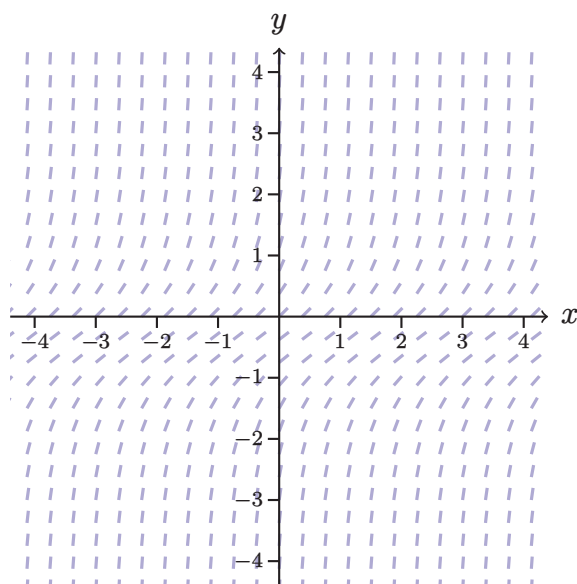
Øvelse 2.4.9

Ligningen $y' = x - y$ (som vi har behandlet ovenover) har en lineær funktion som løsning.

- Find ud fra retningsfeltet ovenover forskriften for den lineære funktion.
- Tjek at det er en løsning, du har fundet.

Øvelse 2.4.10

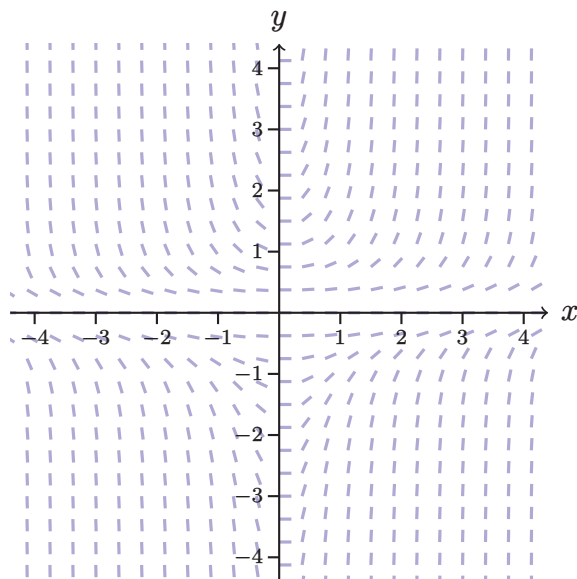
Betragt retningsfeltet for differentialligningen $y' = y^2 + y + 1$:



- a) Tegn løsningskurven gennem punktet $P(2, 1)$.

Øvelse 2.4.11

Betragt retningsfeltet:.



Retningsfeltet er retningsfelt for en af følgende differentialligninger.

1. $y' = x$
2. $y' = y$
3. $y' = x \cdot y$
4. $y' = x^2 \cdot y$
5. $y' = x \cdot y^2$

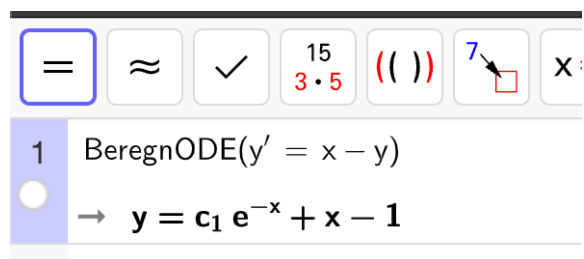
a) Bestem hvilken differentialligning retningsfeltet er lavet ud fra.

2.5 Differentialligninger i GeoGebra

Igennem dette afsnit vil jeg tage udgangspunkt i ligningen $y' = x - y$

Fuldstændige løsninger

Vi finder den fuldstændige løsning i et CAS-vindue med kommandoen BeregnODE.

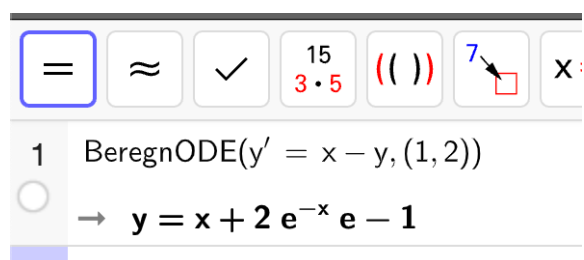


1 BeregnODE($y' = x - y$)
→ $y = c_1 e^{-x} + x - 1$

Vi kan se at den fuldstændige løsning til ligningen $y' = x - y$ er givet ved $y = c \cdot e^{-x} + x - 1$. GeoGebra kalder konstanten for c_1 , men vi kalder vi den bare for c som vi plejer.

Partikulærer løsninger

Vi finder en partikulær løsning i et CAS-vindue med kommandoen BeregnODE, men hvor vi tilføjer punktet som løsningen skal gå igennem.



1 BeregnODE($y' = x - y, (1, 2)$)
→ $y = x + 2 e^{-x} e - 1$

Vi kan se at den partikulære løsning til ligningen $y' = x - y$ gennem punktet $(1, 2)$ er givet ved $y = x + 2 \cdot e^{-x} \cdot e - 1$.

Differentialligninger med andre variabelnavne

Vi vil få brug for at løse differentialligninger, hvor de variable ikke hedder x og y . Det giver lidt problemer i GeoGebra, fordi hvordan skal GeoGebra kunne vide, hvilken variabel der er den uafhængige, og hvilken der er den afhængige? Problemet er dog ikke større end, at vi bare kan omskrive ligningen, så variablene hedder x og y .

Eksempel 2.5.1

Lad $N(t)$ være en funktion og betragt ligningen

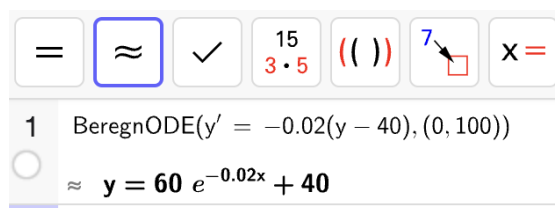
$$\frac{dN}{dt} = -0,02(40 - N)$$

Vi vil nu bestemme den partikulære løsning som går gennem $(0, 100)$.

Vi omskriver først ligningen, så den uafhængige variabel hedder x , den afhængige y og differentialkvotienten y' :

$$y' = -0,02(40 - y)$$

Vi kan nu finde den partikulære løsning på sædvanlig vis i GeoGebra:



Vi skal nu bare tage GeoGebras løsning og huske, hvad de oprindelige variabelnavne var. Det giver os:

$$N(t) = 60e^{-0,02t} + 40$$

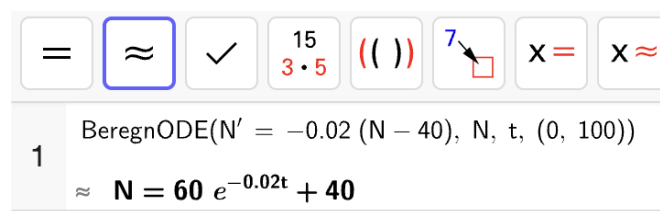
Der er dog også en anden og mere elegant måde at håndtere det på. Man kan nemlig fortælle GeoGebra, hvilken en variabel der hvad.

Eksempel 2.5.2

Lad $N(t)$ være en funktion og betragt ligningen

$$\frac{dN}{dt} = -0,02(40 - N)$$

Vi vil nu bestemme den partikulære løsning som går gennem $(0, 100)$. Vi skriver følgende i GeoGebra:



Det giver os altså løsningen:

$$N(t) = 60e^{-0,02x} + 40$$

Ville vi have den fuldstændige løsning, kunne vi bare have undladt at skrive punktet til sidst.

Øvelse 2.5.1

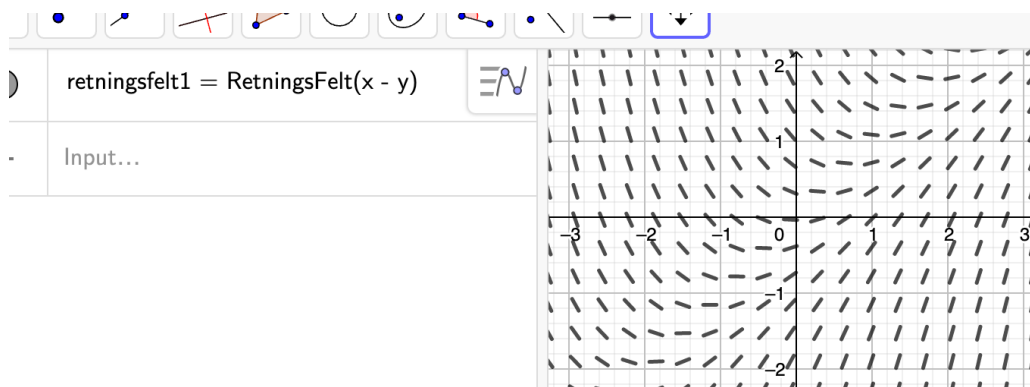
Betragt differentialligningen:

$$s'(t) = s(t) + 2t$$

- Bestem den fuldstændige løsning til ligningen.
- Bestem den partikulære løsning til ligningen som går gennem $(0,4)$.

Retningsfelter og linjeelementer

Vi bruger algebravinduet til at tegne retningsfelter. Vi bruger kommandoen `RetningsFelt`. Så retningsfeltet for ligningen $y' = x - y$ kan bestemmes således:



Læg mærke til at man ikke skal taste ligningen ind, men kun højresiden. Kommandoen kræver at ligningen har formen $y' = f(x, y)$. Altså at man har y' på venstresiden og et udtryk som kun afhænger af x og y på højresiden.

Der er ikke nogen kommando til at beregne linjeelementer, men det er også så nemt at vi ikke behøver nogen kommando.

Øvelse 2.5.2

Betragt differentialligningen $y' = x^2 - y$. I GeoGebra skal du:

- Bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.
- Bestemme den partikulære løsning f til differentialligningen som opfylder $f(3) = 2$.
- Lave et retningsfelt for ligningen.

2.6 Anvendelse af differentiallyigninger

Vi slutter kapitlet af med et simpelt eksempel på anvendelse af differentiallyigninger. Vi kigger på bestanden af en bestemt slags fisk i en sø som funktion af tiden. Hvis der er rigeligt med plads og føde, så vil fiskene kunne formere sig frit. Det kunne f.eks. være at hver fisk i løbet af et år ville blive til 1,2 fisk (i gennemsnit — man kan ikke have 0,2 fisk). Sagt på en anden måde kunne det være at der var en tilvækst pr. fisk på 0,2. Kalder vi antallet af fisk for y , så er tilvæksten af fisk y' og tilvæksten pr. fisk må så være $\frac{y'}{y}$. Alt tilvæksten pr. fisk er 0,2 kan vi altså udtrykke med differentiallyigningen:

$$\frac{y'}{y} = 0,2$$

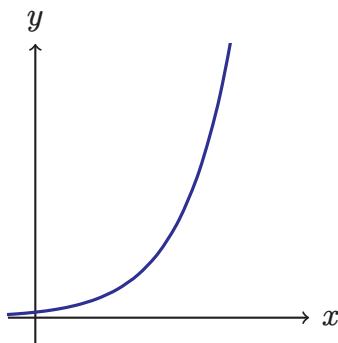
Hvis vi ganger med y får vi:

$$y' = 0,2 \cdot y$$

Sådan en ligning har vi set før. Den har formen $y' = k \cdot y$ og har løsningen:

$$y = c \cdot e^{k \cdot x}$$

Ligningen udtrykker eksponentiel vækst.



Figur 2.1: Antal fisk y , som funktion af tiden x , når de for lov at formere sig ubegrænset.

I praksis er der grænser for hvor mange fisk der er plads til i søen. På et eller andet tidspunkt er der ikke nok plads/føde til at bestanden kan vokse. Lad os kalde den størst opnåelige bestand for M og se på, hvordan bestanden kan udvikle sig. Hvis der er meget plads i søen burde der være en høj tilvækst pr. fisk, mens at tilvæksten pr. fisk bør være lav, hvis søen er ved at være fyldt op. Den mest simple model som passer med det, er en model, hvor tilvæksten pr. fisk er proportional med antallet af ”ledige pladser”. Hvis antallet af fisk er y og der er plads til M , så må der være $(M - y)$ ledige pladser til nye små fiskebasser. Altså får vi ligningen:

$$\frac{y'}{y} = a \cdot (M - y)$$

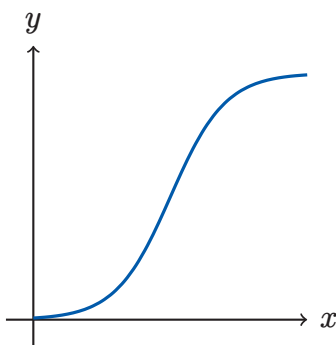
Vi ganger med y

$$y' = a \cdot y(M - y)$$

Vi genkender formlen fra tabellen. Det var den som hed logistisk vækst og den har løsningen:

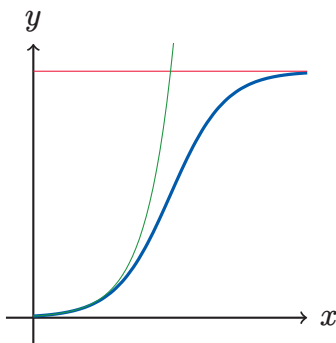
$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

Tegner man grafen ser den således ud:



Figur 2.2: Antal fisk y , som funktion af tiden x når der er begrænset plads.

Vi kan se at den i starten ligner eksponentiel vækst og til slut flader ud. Faktisk nærmer den sig linjen $y = M$.



Figur 2.3: i starten ligner grafen **eksponentiel vækst** og til slut nærmer den sig $y = M$.

Skal man anvende modellerne fra dette afsnit i praksis kræver det at man bestemmer partikulære løsninger også.

Øvelse 2.6.1

Når der er få fisk i søen, kan vi bruge modellen for ubegrænset vækst. Dvs. vi kan antage at:

$$y' = 0,2 \cdot y$$

- a) Bestem en model for antallet af fisk i søen, $f(x)$, når der starter med at være 1.000 fisk i søen.

Øvelse 2.6.2

Når vi kommer tættere på grænsen for antallet af fisk, er vi nødt til at modellere bestanden med logistisk vækst:

$$y' = a \cdot y(M - y)$$

Antag at der er plads til 100.000 fisk i søgen

- a) Argumenter for, at hvis $y \ll M$ (y er meget mindre end M), så er $y' \approx a \cdot M \cdot y$ i den logistiske model.
- b) Udnyt at $y' \approx a \cdot M \cdot y$ når $y \ll M$ til at bestemme, hvad a skal være så modellen giver samme vækst som modellen i øvelse 2.6.1, når der er få fisk i søen.
- c) Bestem en logistisk model, $g(x)$, for antallet af fisk i søen, som matcher modellen i øvelse 2.6.1, når der er få fisk i søen.

Ekstra

Øvelse 2.6.3

Betragt differentialligningen for logistisk vækst:

$$y' = a \cdot y(M - y)$$

- a) Argumenter for (ud fra ligningen), at y må vokse eksponentielt når $y \ll M$.
- b) Argumenter for (ud fra ligningen), at y nærmer sig linjen $y = M$ når y er stor.

2.7 Beviser - Differentialligninger

Sætning 2.7.1

For differentialligningen $y' = b - a \cdot y$, hvor $a \neq 0$, er den fuldstændige løsning givet ved

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

hvor c er en konstant.

Bevis

Vi har ligningen

$$y' = b - a \cdot y$$

Vi lægger $a \cdot y$ til på begge sider

$$y' + a \cdot y = b$$

og ganger med $e^{a \cdot x}$ på begge sider

$$y' \cdot e^{a \cdot x} + a \cdot y \cdot e^{a \cdot x} = b \cdot e^{a \cdot x}$$

Vi ændrer på faktorernes rækkefølge i bageste led på venstresiden

$$y' \cdot e^{a \cdot x} + y \cdot a \cdot e^{a \cdot x} = b \cdot e^{a \cdot x}$$

Vi genkender $a \cdot e^{a \cdot x}$ som værerende differentialkvotienten af $e^{a \cdot x}$

$$y' \cdot e^{a \cdot x} + y \cdot (e^{a \cdot x})' = b \cdot e^{a \cdot x}$$

og vi genkender nu venstresiden som værende differentialkvotienten af $y \cdot e^{a \cdot x}$

$$(y \cdot e^{a \cdot x})' = b \cdot e^{a \cdot x}$$

Vi integrerer på begge sider

$$y \cdot e^{a \cdot x} = \int b \cdot e^{a \cdot x} dx$$

og får

$$y \cdot e^{a \cdot x} = b \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c$$

Til sidst reducerer vi højresiden og ganger vi med $e^{-a \cdot x}$ på begge sider

$$y \cdot e^{a \cdot x} \cdot e^{-a \cdot x} = \frac{b}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot e^{-a \cdot x} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Da $e^{a \cdot x} \cdot e^{-a \cdot x} = 1$ får vi

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Sætning 2.7.2

Antag at $y' = h(x) \cdot g(y)$ og at $g(y) \neq 0$. Så gælder

$$\int \frac{1}{g(y)} dx = \int h(x) dy$$

Vi vil lave to beviser for sætningen. Det første er nemt at forstå men problematisk, mens det andet er mere abstrakt men solidt.

Bevis

Antag $y' = h(x) \cdot g(y)$ og at $g(y) \neq 0$. Vi skriver y' som $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

Vi ganger med dx på begge sider:

$$dy = h(x) \cdot g(y) dx,$$

og da $g(y) \neq 0$ kan vi dividere med $g(y)$ på begge sider af ligningen:

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x) dx.$$

Vi omskriver venstresiden

$$\frac{1}{g(y)} dy = h(x) dx.$$

og integrere på begge sider

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Bevis

Antag $y' = h(x) \cdot g(y)$ og at $g(y) \neq 0$. Da $g(y) \neq 0$ kan vi dividere med $g(y)$ på begge sider af ligningen.

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x)$$

Vi omskriver venstresiden

$$\frac{1}{g(y)} y' = h(x)$$

og integrere med hensyn til x på begge sider

$$\int \frac{1}{g(y)} y' dx = \int h(x) dx$$

Afsluttende bruger vi nu substitutionsformlen til at omskrive venstresiden (forklaring følger)

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

Forklaring: Substitutionsformlen kan bruges når integranden har formen: $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Det passer med vores udtryk. Vi har nemlig en indre funktion y i en ydre funktion $f(y) = \frac{1}{g(y)}$, med den indres differentialkvotient y' ganget på. Bemærk at det g som optræder i differentialligningen er et andet g end det fra substitutionsformlen (hvor det betyder den indre funktion). Substitutionsformlen siger nu at $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$, hvor t er den indre funktion. I vores tilfælde hedder den indre funktion y , og derfor får vi altså at $\int \frac{1}{g(y)} y' dx = \int \frac{1}{g(y)} dy$.

Kapitel 3

Lineær programmering

Ud fra navnet ”lineær programmering” kunne man tro, at emnet handler om at skrive computerkode omhandlende lineære funktioner. Det gør det dog ikke. I stedet handler det om at løse en bestemt type af problemer. Et sådan problem kunne være:

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad

bliver det maksimale dækningsbidrag?

I næste afsnit vil jeg introducere lineær programmering med udgangspunkt i dette problem.

3.1 Lineær programmering med hjørneinspektion

Lineær programmering handler om at løse en bestemt type af opgaver. Det kan gøres med forskellige teknikker, og i dette afsnit skal vi se på den mest simple: *lineær programmering ved hjørneinspektion*. Selvom det er den mest simple metode, er den stadig relativt kompliceret, og derfor vil vi i første omgang fokusere på **hvordan** man gør, og så kommer der forklaringer og detaljer i senere afsnit. Vi vil vise metoden med udgangspunkt i opgaven:

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

Opstilling af skema

Opgaven kan virke lidt forvirrende, og derfor er første skridt at skrive informationerne op i et skema, som er nemt at overskue.

	Trøjer	Bukser	Til rådighed
Bomuld	1,5 m ²	1 m ²	120 m ²
Polyester	0,5 m ²	2 m ²	130 m ²
Dækningsbidrag	300 kr.	400 kr.	

Kriteriefunktionen

Vi skal optimere dækningsbidraget, og derfor starter vi med at bestemme en forskrift for dækningsbidraget. Dækningsbidraget afhænger af antallet af producerede trøjer og antallet af producerede bukser, og derfor sætter vi:

x = Antal producerede trøjer

y = Antal producerede bukser

Dækningsbidraget for en trøje er 300 kr. og dækningsbidraget for et par bukser er 400 kr., så hvis vi producerer x trøjer og y par bukser, må dækningsbidraget være givet ved funktionen

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

Denne funktion kaldes også *kriteriefunktionen*. Generelt er kriteriefunktion den funktion, vi gerne vil optimere. I denne opgave er kriteriefunktionen en funktion som udtrykker dækningsbidraget, men i andre sammenhænge kunne udtrykke andre ting som f.eks. omkostninger eller tidsforbrug.

Polygonområde

Det er klart at jo flere trøjer og bukser vi producerer, jo mere tjener vi. Men da vi har begrænsede mængder af bomuld og polyester vil det være begrænset, hvor meget vi kan producere af hver.

Producerer vi x trøjer og y par bukser vil vi bruge $1,5 \cdot x + 1 \cdot y$ kvadratmeter bomuld (se skemaet). Da vi kun har 120 m^2 bomuld til rådighed, skal x og y altså opfylde uligheden:

$$1,5x + y \leq 120$$

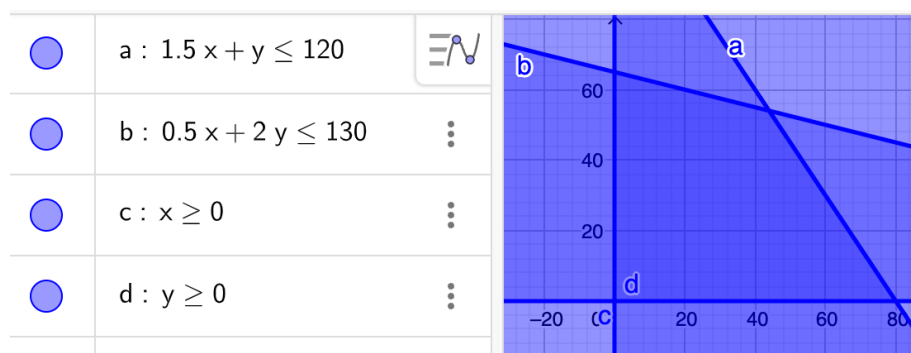
For polyester må der gælde:

$$0,5x + 2y \leq 130$$

Da vi ikke kan producere et negativt antal trøjer eller bukser har vi:

$$x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

Disse uligheder kan vi skrive ind i et algebravindue i GeoGebra og det vil give os:



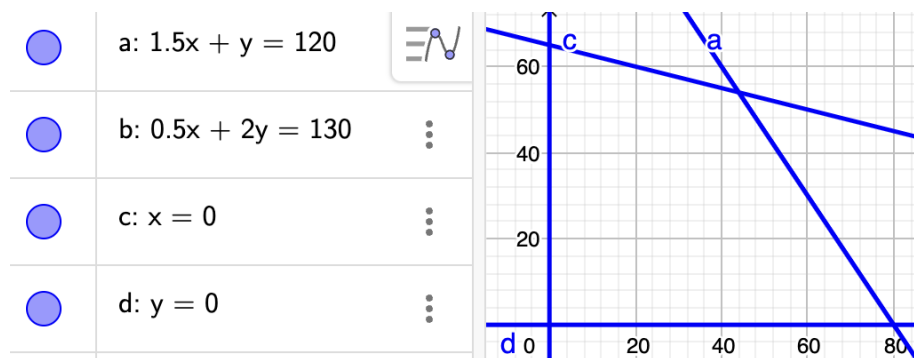
Det mørkeste område kaldes *polygonområdet*, og det viser, hvad der er muligt at producere. F.eks. ligger punktet $(40, 20)$ i polygonområdet,

og det betyder at vi har nok stof til at producere 40 trøjer og 20 bukser, hvis vi vil det.

Bestemmelse af det optimale punkt

Vi har nu identificeret det optimale punkt i polygonområdet. I lineær programmering ligger det optimale punkt altid i et hjørne. Derfor starter vi med at finde hjørnepunkterne i polygonområdet.

Vi starter med at ændre ulighedstegnene til lighedstegn:



Vi kan nu finde hjørnepunkterne med skæringsværktøjet i GeoGebra. Det giver punkterne:

$$(0, 0) \quad (0, 65) \quad (44, 54) \quad (80, 0)$$

Vi regner nu funktionsværdien i hvert punkt. Dvs. vi indsætter punkterne i kriteriefunktionen som jo havde forskriften $f(x, y) = 300x + 400y$:

$$f(0, 0) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 0 = 0$$

$$f(0, 65) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 65 = 26000$$

$$f(44, 54) = 300 \cdot 44 + 400 \cdot 54 = 34800$$

$$f(80, 0) = 300 \cdot 80 + 400 \cdot 0 = 24000$$

Vi ser at den højeste funktionsværdi er 34800 i punktet (44, 54). Det betyder at vi skal producere 44 trøjer og 54 bukser for at få det maksimale dækningsbidrag som er på 34800 kr.

Øvelse 3.1.1

En virksomhed producerer to produkter: Produkt A og PRODUKT B.

Til PRODUKT A skal der bruges 2 arbejdstimer og 5 kg råmateriale, mens PRODUKT B kræver 4 arbejdstimer og 1 kg råmateriale.

Virksomheden har 100 arbejdstimer til rådighed og 70 kg råmateriale.

Dækningsbidraget for PRODUKT A er 10 kr. pr. stk. mens dækningsbidraget for PRODUKT B er 8 kr. pr. stk.

Virksomheden vil gerne optimere dækningsbidraget.

- a) Opstil et skema som viser informationerne på en overskuelig måde.
- b) Definer x og y (dvs. bestem, hvad de skal betegne).
- c) Opskriv en forskrift for kriteriefunktionen.
- d) Tegn polygonområdet i GeoGebra.
- e) Bestem, hvor mange PRODUKT A og hvor mange PRODUKT B virksomheden skal lave, og bestem det maksimale dækningsbidrag. Det forventes, at du bruger skæringsværktøjet (eller en anden eksakt metode) til at finde hjørnepunkterne. Det er ikke nok at aflæse.

Øvelse 3.1.2

Vi bliver ved virksomheden fra sidste øvelse.

- a) Hvad bliver den optimale produktion og det tilhørende dækningsbidrag, hvis nu dækningsbidraget for PRODUKT A pludselig stiger til 20 kr. pr. stk.?
- b) Hvad bliver den optimale produktion og det tilhørende dækningsbidrag, hvis nu dækningsbidraget for PRODUKT A stiger videre til 60 kr. pr. stk.?

Ligesom vi kan bruge lineær programmering til at maksimere en funktion, kan vi også bruge det til at minimere en funktion.

Eksempel 3.1.1

Vi vil minimere funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ underlagt betingelserne:

$$2x + y \geq 10$$

$$x + y \geq 8$$

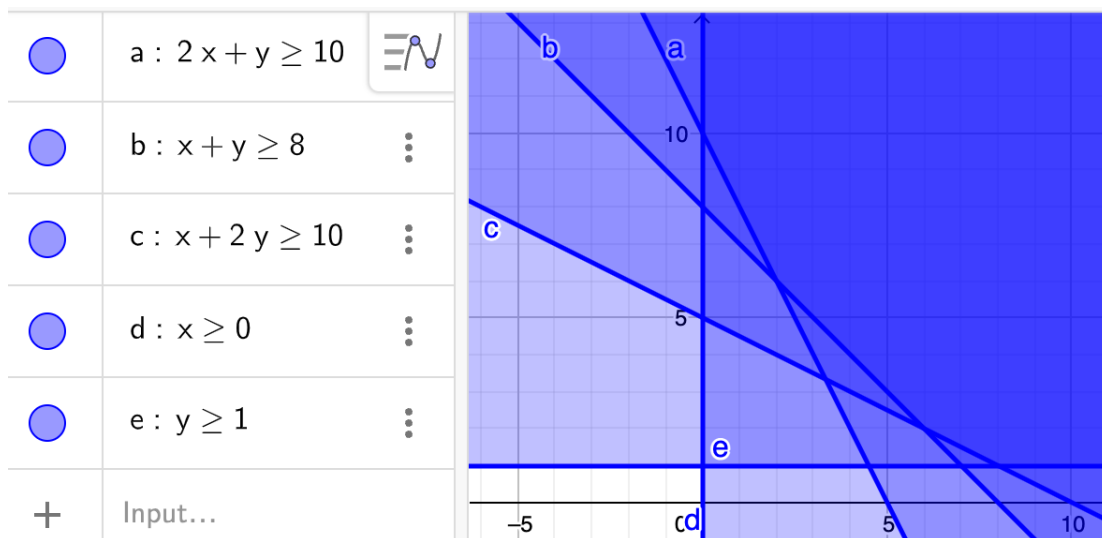
$$x + 2y \geq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 1$$

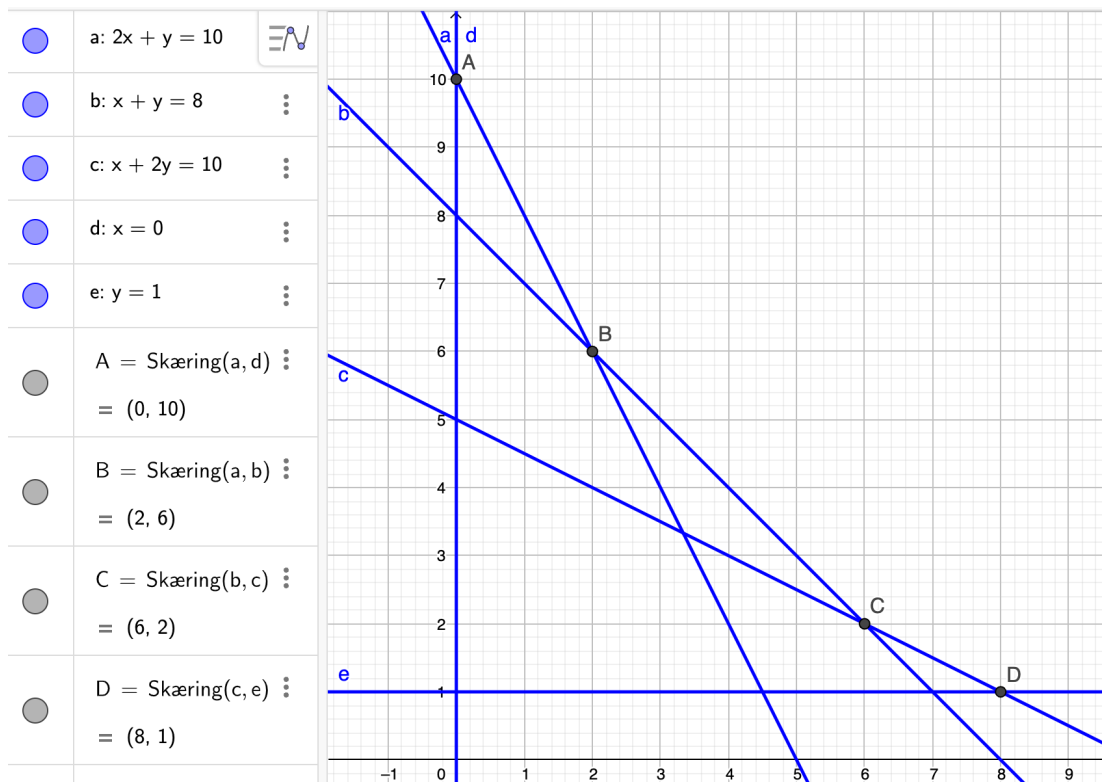
Læg mærke til at vi har " $\geq$ " i stedet for " $\leq$ " i begrænsningerne. Det er fordi det er en minimeringsopgave. Her har vi minimumskrav i stedet for begrænsede ressourcer.

Vi tegner polygonområdet i GeoGebra:



Igen er polygonområdet det mørkeste område, så det er området øverst til højre. Denne gang er polygonområdet altså uendeligt stort. Sådan vil det typisk være i minimeringsopgaver.

Opgaven løses er helt tilsvarende til maksimering. Vi laver ulighederne om til ligninger og finder skæringspunkterne med skæringsværktøjet.



Jeg tester nu hjørnepunkterne:

$$f(0, 10) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 10 = 20$$

$$f(2, 6) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18$$

$$f(6, 2) = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 22$$

$$f(8, 1) = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 25$$

Den mindste funktionsværdi er 18 og det sker i punktet (2, 6). Vi konkluderer at funktionen har minimum i (2, 6) og minimumsværdien er 18.

Øvelse 3.1.3

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumban-
ner og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose.
Mindst 120g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- a) Lav et skema med oplysningerne i opgaven.
- b) Definer x og y .
- c) Opskriv en funktion som udtrykker elevens omkostninger pr. slikpose.
- d) Tegn polygonområdet.
- e) Bestem, hvad eleven skal putte i poserne og bestem den samlede udgift pr. pose.
- f) Pludselig stiger prisen på piratos til 1,5 kr. stk.. Hvad skal hun nu putte i poserne for at minimere sine udgifter.

3.2 Lineær programmering med niveaulinjer

I stedet for at regne alle punkterne i polygonområdet, kan vi bruge noget som hedder *niveaulinjer* til at finde det mest optimale punkt. Vi vil nu regne de samme eksempler/øvelser som i sidste afsnit, men bare med niveaulinjer som en del af metoden.

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

Opstilling af skema

Ingen ændringer her:

	Trøjer	Bukser	Til rådighed
Bomuld	$1,5 \text{ m}^2$	1 m^2	120 m^2
Polyester	$0,5 \text{ m}^2$	2 m^2	130 m^2
Dækningsbidrag	300 kr.	400 kr.	

Kriteriefunktionen

Heller ingen ændringer her. Vi sætter altså

x = Antal producerede trøjer

y = Antal producerede bukser

Dækningsbidraget må dermed være givet ved:

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

Polygonområde

Igen ingen ændringer. Ud fra skemaet ses at

$$1,5x + y \leq 120$$

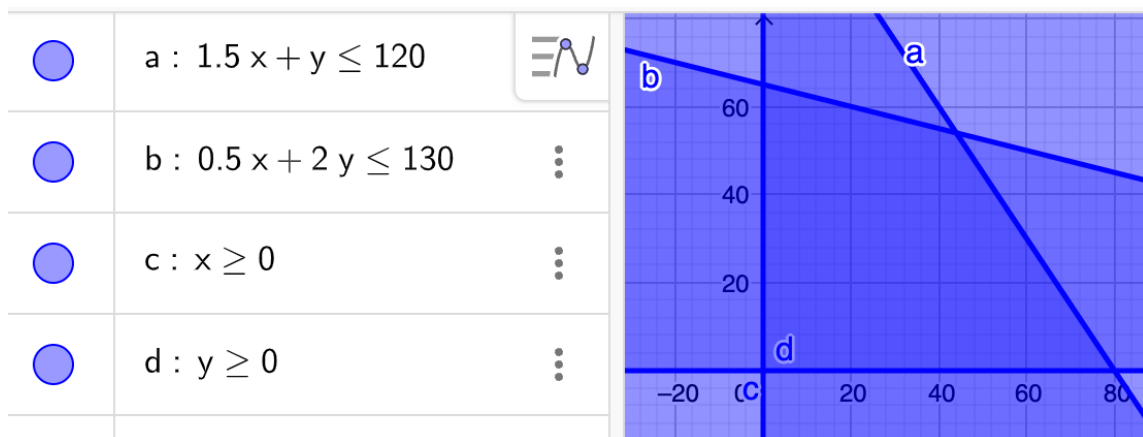
For polyester må der gælde:

$$0,5x + 2y \leq 130$$

Da vi ikke kan producere et negativt antal trøjer eller bukser har vi:

$$x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

Disse uligheder kan vi skrive ind i et algebravindue i GeoGebra og det vil give os:



Det mørkeblå er polygonområdet.

Niveaulinjer

Nu kommer det nye. I stedet for at teste alle hjørnepunkterne i polygonområdet, vil vi starte med at identificere det optimale punkt. Det

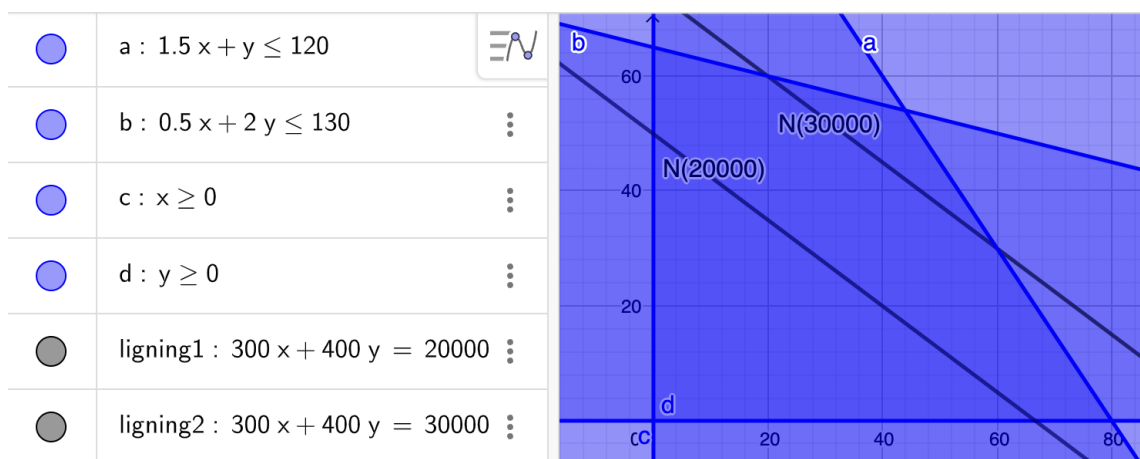
gør vi ved hjælp af det, som hedder *niveaulinjer*. En niveaulinje $N(t)$ (læses "n t") er en linje givet ved ligningen:

$$f(x, y) = t$$

Vi skal nu tegne to niveaulinjer i GeoGebra. Vi vælger (forklaring følger senere) $N(20000)$ og $N(30000)$. For at finde dem skal vi altså sætte $f(x, y) = 20000$ og $f(x, y) = 30000$. Det giver:

$$300x + 400y = 20000 \quad \text{og} \quad 300x + 400y = 30000.$$

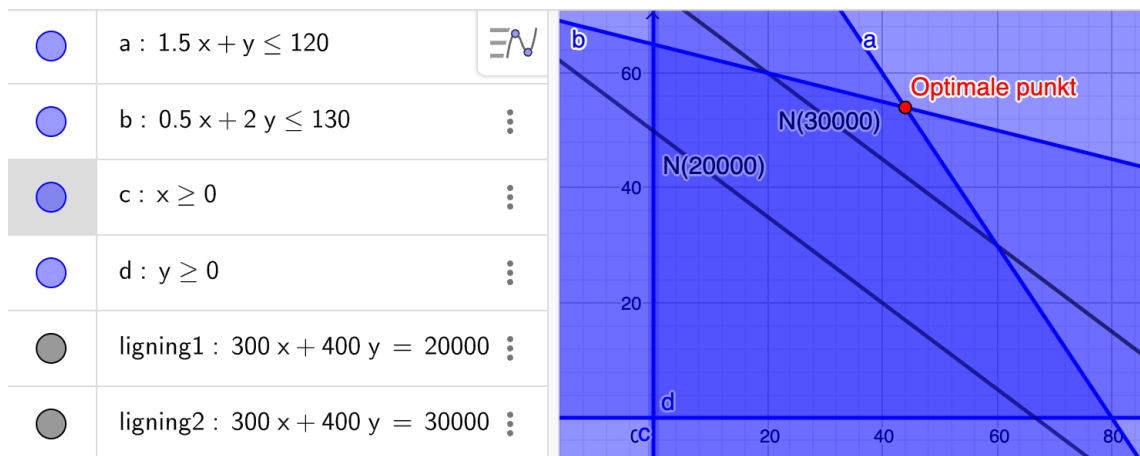
Vi taster disse to ligninger ind i GeoGebra (jeg har været inde og navngive linjerne, det sker ikke af sig selv):



De to linjer udtrykker to forskellige dækningsbidrag. Alle de punkter på $N(20000)$ svarer til et dækningsbidrag på 20000 kr. og punkterne på $N(30000)$ svarer til et dækningsbidrag på 30000 kr.

Vi ser at $N(30000)$ fås ved at parallelforskyde $N(20000)$ skråt op til højre. Vi får altså et højere dækningsbidrag (hvilket er det vi ønsker) når vi parallelforsker skråt op til højre. Vi forestiller os nu at vi bliver ved med at forskyde $N(20000)$ skråt op til højre. På et tidspunkt kommer

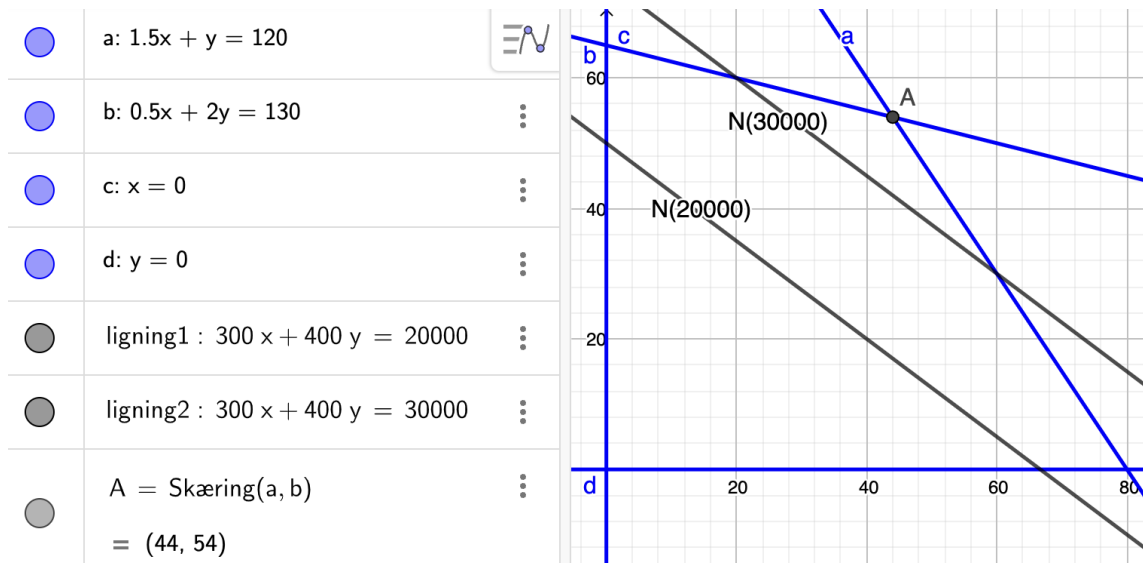
linjen helt fri af polygonområdet. Det sidste punkt den slipper inden den forlader polygonområdet er det optimale punkt. Det er klart, at der må være tale om dette her hjørnepunkt i polygonområdet:



Hvis du undrer dig over, hvor jeg fik 20000 og 30000 fra, så er svaret, at jeg prøvede mig frem, indtil jeg fandt to linjer, som lå pænt (adskilt) i polygonområdet.

Bestemmelse af det optimale punkt

Nu skal vi bare bestemme koordinaterne til det punkt, vi har fundet. Det gør vi ved at ændre ulighedstegnene til lighedstegn, og bruge skæringsværktøjet på det punkt, vi har identificeret:



Vi ser at skæringspunktet er (44, 54). Det betyder, at vi skal producere 44 trøjer og 54 bukser for at få det maksimale dækningsbidrag. Det maksimale dækningsbidrag finder vi ved at sætte punktet ind i f :

$$f(44, 54) = 300 \cdot 44 + 400 \cdot 54 = 34800$$

Vi konkluderer, at det optimale dækningsbidrag er 34800 kr.

Metoden virker måske lidt mere abstrakt end hjørneinspektion, men niveaulinjer er en essentiel del af lineær programmering som det forventes, at man har styr på. Man kan altså ikke vælge at sige ”Jeg holder mig til hjørneinspektion”. Derudover er en god forståelse af niveaulinjer en forudsætning for at kunne mestre følsomhedsanalyse (Mat-A) og kvadratisk programmering (Mat-A).

Øvelse 3.2.1

En virksomhed producerer to produkter: Produkt A og PRODUKT B.

Til PRODUKT A skal der bruges 2 arbejdstimer og 5 kg råmateriale, mens PRODUKT B kræver 4 arbejdstimer og 1 kg råmateriale.

Virksomheden har 100 arbejdstimer til rådighed og 70 kg råmateriale.

Dækningsbidraget for PRODUKT A er 10 kr. pr. enhed mens dækningsbidraget for PRODUKT B er 8 kr. pr. enhed.

Virksomheden vil gerne optimere dækningsbidraget.

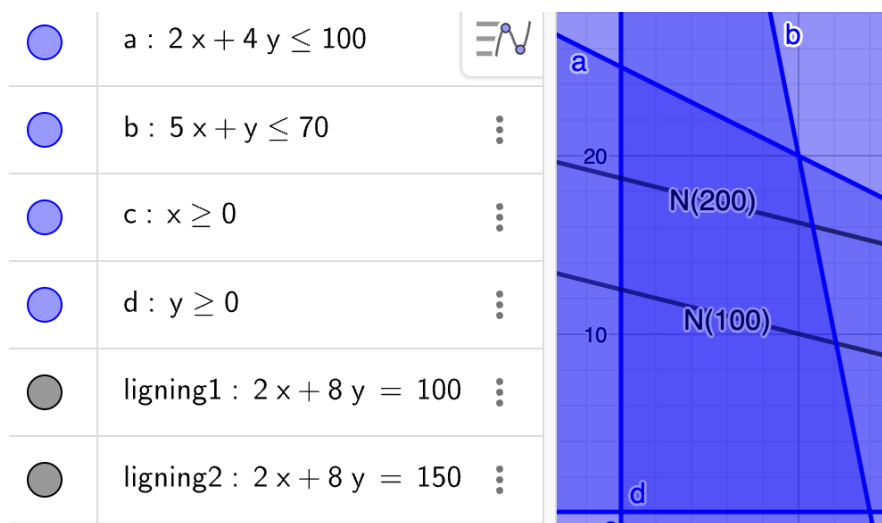
- a) Lav skema for oplysningerne, definer x og y , opskriv en forskrift for kriteriefunktionen og tegn polygonområdet i GeoGebra. Det er samme opgave som fra sidste afsnit, så du kan bruge det du lavede der, hvis du stadig har det.
- b) Tegn to passende niveaulinjer. Dvs. du skal prøve dig lidt frem indtil du finder nogle niveaulinjer som ligger pænt i polygonområdet.
- c) Bestem i hvilken retning dækningsbidraget vokser.
- d) Identificer det optimale punkt (du skal ikke beregne det endnu). Argumenter for dit resultat.
- e) Regn koordinaterne til det punkt du har identificeret som det optimale. Brug f.eks. skæringsværktøjet. Det er ikke nok at aflæse.
- f) Bestem, hvor mange PRODUKT A og hvor mange PRODUKT B virksomheden skal lave, og beregn det maksimale dækningsbidrag.

Eksempel 3.2.1

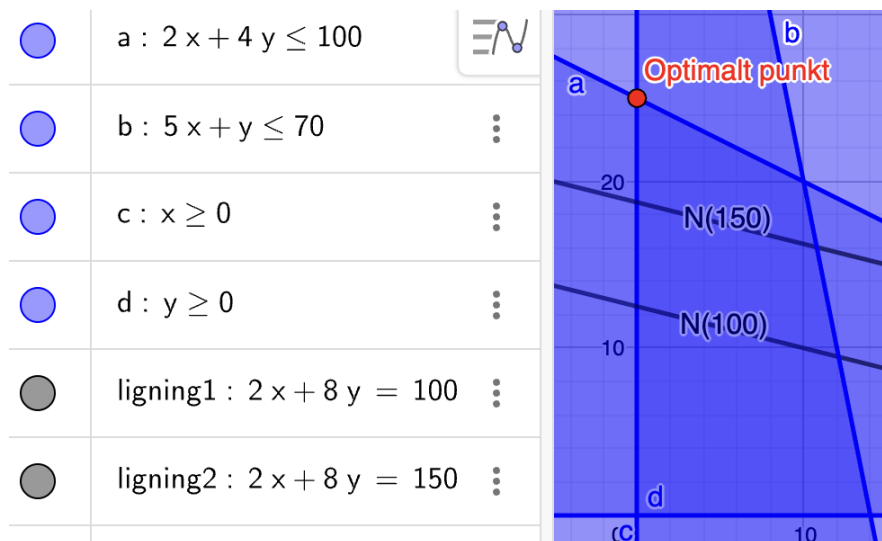
Med udgangspunkt i virksomheden fra øvelsen ovenover forstiller vi os nu at dækningsbidraget for PRODUKT A falder til til 2 kr. pr. stk. Det giver følgende ændringer i kriteriefunktionen:

$$f(x, y) = 2x + 8y$$

Vi tegner $N(100)$ og $N(150)$:



Vi ser at niveauerne stadig vokser skråt op til højre (mere op end til højre denne gang), og vi ser at det sidste punkt niveaulinjerne slipper være:



Aha! et nyt optimalt punkt! Punktets koordinater findes på sædvanligvis ved at ændre ulighedstegn til lighedstegn og bruge skæringsværktøjet.. Det optimale punkt bliver således $(0, 25)$. Vi konkludere at dækningsbidraget for PRODUKT A er blevet så lavt, at det ikke længere kan betale sig at producere PRODUKT A. Det maksimale dækningsbidrag regnes ved:

$$f(0, 25) = 2 \cdot 0 + 8 \cdot 25 = 200$$

Altså er det optimale dækningsbidrag 200 kr. ved en produktion af 25 PRODUKT B.

Øvelse 3.2.2

Vi bliver ved virksomheden fra eksemplet oven over. Bestem vha. niveaulinjer det optimale punkt når:

- Dækningsbidraget for PRODUKT A er 10 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for PRODUKT B er 5 kr. pr. stk.

- b) Dækningsbidraget for PRODUKT A er 30 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for PRODUKT B er 2 kr. pr. stk.
- c) Dækningsbidraget for PRODUKT A er 4 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for PRODUKT B er 16 kr. pr. stk.

Eksempel 3.2.2

Vi vil minimere funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ underlagt betingelserne:

$$2x + y \geq 10$$

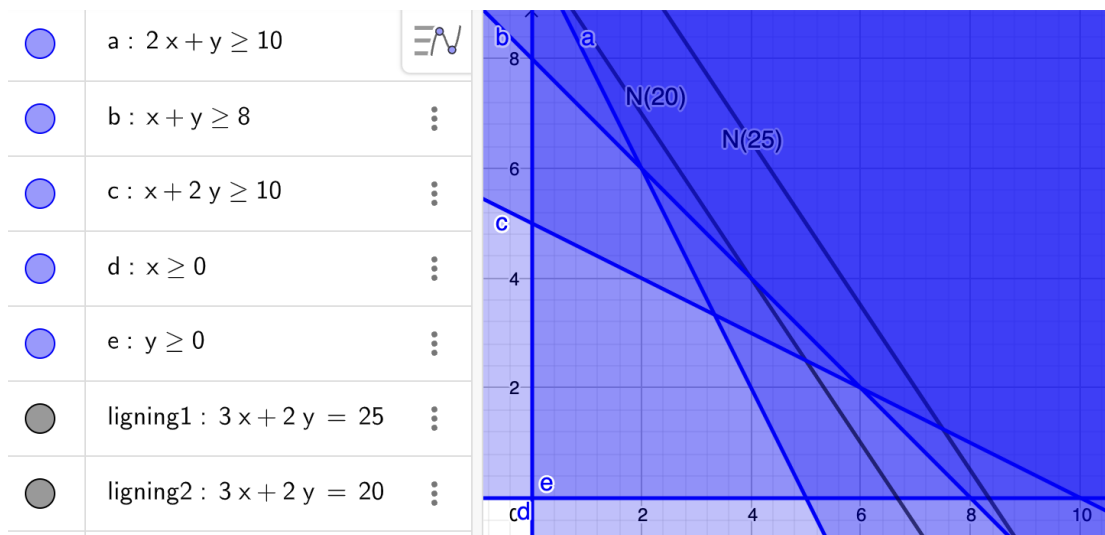
$$x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Vi tegner polygonområdet i GeoGebra og niveaulinjerne $N(20)$ og $N(25)$



Vi ser at niveauerne vokser skråt op til højre. Vi er interesserede i

minimum så vi skal altså forskyde niveaulinjerne i modsat retning – altså skråt ned til venstre. Vi ser at niveaulinjerne slipper polygonområdet i punktet $(2, 6)$ (vi tjekker at det er de eksakte koordinater ved at bruge skæringsværktøjet efter at vi har ændret ulighedstegn til lighedstegn). Vi regner funktionsværdien i punktet:

$$f(2, 6) = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 18$$

Vi konkluderer at funktionen har minimum i $(2, 6)$ og minimumsværdien er 18.

Øvelse 3.2.3

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbananer og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- Lav et skema med oplysningerne i opgaven.
- Definer x og y .
- Opskriv en funktion som udtrykker elevens omkostninger pr. slikpose.
- Bestem vha. niveaulinjemetoden, hvad eleven skal putte i poserne og bestem den samlede udgift pr. pose.
- Pludselig falder prisen på miniskumbananer til 0,75 kr. stk..

Hvad skal hun nu putte i poserne for at minimere sine udgifter.
Brug igen niveaulinjer til at svare på spørgsmålet.

3.3 Teori for lineær programmering

Vi skal nu se på den underliggende teori for lineær programmering. Det første vi får brug for at indføre er lineære funktioner i to variable

Lineære funktioner i to variable

Indtil vi startede dette kapitel var en funktion noget som lavede x -værdier om til y -værdier. Dette kaldes også en *funktion i én variabel*. En funktion i to variable er noget som laver talpar x, y om til z -værdier (vi kan ikke længere kalde funktionsværdierne for y -værdier fordi det bogstav har vi allerede brugt). Der er altså to uafhængige variable (x og y) og én afhængig variable (z).

Eksempel 3.3.1

Funktionen med forskriften $f(x, y) = 2x + 6y - 10$ er en funktion i to variable fordi den afhænger af to variable x og y .

Definition 3.3.1

En lineær funktion i to variable er en funktion på formen

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Vi ser at definitionen minder om definitionen for sædvanlige lineære funktioner, bortset fra at y indgår på samme måde som x i stedet for at betegne funktionsværdien (som her altså betegnes med z).

Eksempel 3.3.2

Funktionen med forskriften $f(x, y) = 2x + 6y + 10$ er en lineær funktion i to variable fordi den har formen

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Øvelse 3.3.1

Du skal nu kigge på nogle forskrifter for nogle funktioner. Du skal afgøre om der er tale om en:

1. Funktion i to variable
2. Lineære funktion i to variable

Her er forskrifterne:

- a) $f(x) = 2x + 3$
- b) $f(x, y) = 2x + 3y$
- c) $f(x, y) = -2x + 3y - 2$
- d) $f(x, y) = x^2 + y^2$

Øvelse 3.3.2

Lad $f(x, y) = x - y$

- a) Bestem $f(2, 3)$

Polygonområdet

Man kan tænke på polygonområdet som definitionsmængden for kriteriefunktionen. Vi husker at definitionsmængden for en almindelig funktion består af alle de x 'er man kan sætte ind i funktionen. Her har vi

en funktion i to variable, og derfor skal vi kigge på punkter i stedet for x 'er. Kriteriefunktionen kan rent matematisk regnes for alle punkter, men kun dem indenfor polygonområdet beskriver noget, som kan lade sig gøre i den praktiske situation, og derfor får kriteriefunktionen polygonområdet som definitions­mængde.

Eksempel 3.3.3

Lad et polygonområde være givet ved ulighederne:

$$2x - y \leq 5$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Skal vi tjekke om $(2, 3)$ ligger i polygonområdet skal vi indsætte punktet i ulighederne og se om de er opfyldt:

$$2 \cdot 2 - 3 \leq 5$$

$$2 \geq 0$$

$$3 \geq 0$$

Alle uligheder opfyldte så punktet ligger i polygonområdet.

Øvelse 3.3.3

Med udgangspunkt i eksemplet oven over.

- Undersøg om punktet $(9, 3)$ ligger i polygonområdet.
- Antag at x og y står for et antal producerede varer (hhv. VARE A og VARE B). Forklare hvad dit resultat i spørgsmål a) betyder i den sammenhæng.

Niveaulinjer

Normalt bruger vi grafer til at give et grafisk billede af en funktion. Man kan også tegne grafer for funktioner i to variable, men det er lidt sværere at have med at gøre, og derfor har jeg placeret det i ekstra-afsnittet nederst. I stedet for grafer bruger vi det som hedder niveaukurver:

Definition 3.3.2

Lad f være en funktion i to variable og lad t være et tal. *Niveaukurven* $N(t)$ er figuren givet ved ligningen:

$$f(x, y) = t$$

Som vi senere vil bevise, er niveaukurverne i lineær programmering altid linjer, og derfor kaldes de "niveaulinjer". Vi ser af definitionen at niveaukurven $N(t)$ består af alle de punkter (x, y) som har en funktionsværdi på t .

Eksempel 3.3.4

Lad $f(x, y) = 2x + y$.

Niveaulinjen $N(7)$ er givet ved ligningen $2x + y = 7$.

Punktet $(1, 5)$ ligger på niveaukurven $N(7)$ fordi

$$f(1, 5) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

Punktet $(3, 4)$ ligger ikke på niveaukurven $N(5)$ fordi

$$f(3, 4) = 2 \cdot 3 + 4 = 10 \neq 5$$

Øvelse 3.3.4

Lad $f(x, y) = 2x + 4y + 1$

- Opstil ligningen for $N(0)$
- Undersøg om punktet $(3, 2)$ ligger på $N(15)$
- Antag at et punkt (x_0, y_0) ligger på $N(95)$. Bestem funktionsværdien $f(x_0, y_0)$.

At niveaukurverne altid er linjer, når vi har en lineær funktion i to variable, er udtrykt i følgende sætning:

Sætning 3.3.1

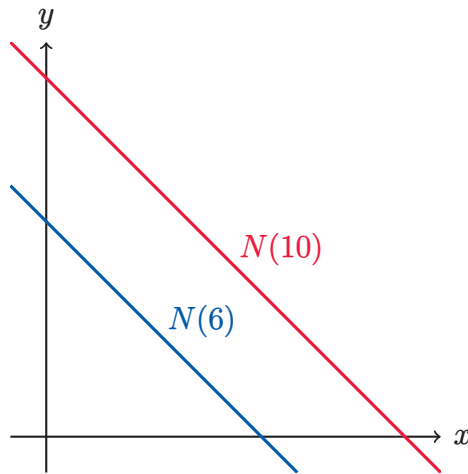
Lad $f(x, y) = ax + by + c$, antag at $b \neq 0$ og lad t være et tal. Da er niveaukurven $N(t)$ en linje med forskriften:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Ændres t vil linjen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis b er positiv vil en højere t -værdi forskyde linjen op.
- Hvis b er negativ vil en højere t -værdi forskyde linjen ned.

Man kan undrer sig over at sætningen nævner en "lodret forskydning". Var det ikke en skrå forskydning, vi så i de to første afsnit? Lad os se på et simpelt eksempel.



Jeg kan se at $N(10)$ er en parallelforskydning af $N(6)$, men i hvilken retning. Med den logik vi har brugt indtil videre ville vi sige skråt op til højre. Men kan også se det som en lodret forskydning op. Husk på at linjerne er uendeligt lange, så det er klart at hvis vi forskyder $N(6)$ lodret op, så vil den komme til at ligge oven i $N(10)$ til på et tidspunkt.

Sætning 3.3.1 garanterer, at niveaulinjerne opfører sig på en systematisk måde. Vi kan se at der er to muligheder. Om det er den ene eller anden situation vi er i, kan vi afgøre ved at kigge på b ellers kan vi (som vi har gjort indtil videre) tegne 2 niveaulinjer, og så garanterer sætningen at mønsteret kan generaliseres til hele polygonområdet.

Ekstra

Vi vil nu vise hvordan man "tegner" grafen for en funktion i to variable. Vi vil tage udgangspunkt i funktionen

$$f(x, y) = 0,2x + 0,6y + 10$$

Fordi vi har tre variable (2 uafhængige og 1 afhængig) har vi brug for et koordinatsystem med tre akser. Vi får altså en 3d graf.

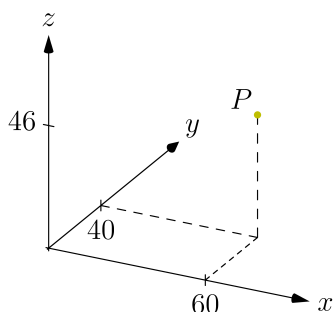
Vi tegner grafen ved at lave et sildeben. Vi skal således vælge et x og et y , regne $f(x, y)$ og tegne punktet $(x, y, f(x, y))$ ind. Det svarer helt til det metoden for funktioner i én variable. Lad os vælge punktet $(60, 40)$. Vi skal sætte ind forskriften $f(x, y) = 0,2x + 0,6y + 10$:

$$f(60, 40) = 0,2 \cdot 60 + 0,6 \cdot 40 + 10 = 46$$

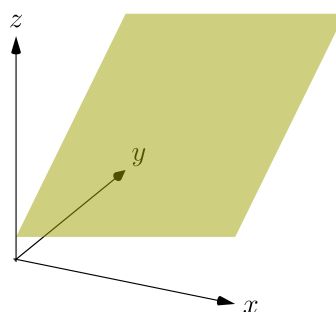
Det giver os vores første punkt i sildebenet:

x	60
y	40
$f(x, y)$	46

Regner vi flere punkter til sildebenet kan grafen konstrueres:

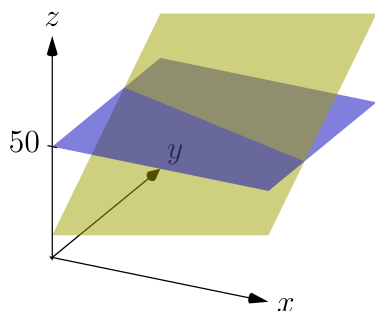


Første punkt tegnes ind.

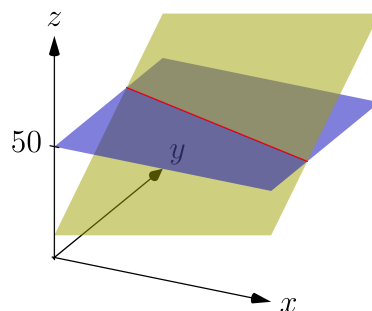


Vi regner flere punkter i sildebenet og tegner dem ind. Grafen fremkommer når vi tegner rigtig mange punkter.

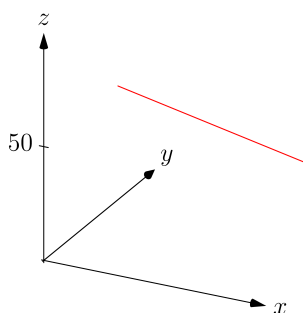
Vi ser at grafen for funktionen f er en skrå plan (en flade) i 3 dimensioner. Du skal forstille dig den er uendeligt stor, jeg har bare tegnet et udsnit. Ud fra grafen kan vi også forklare, hvordan niveaulinjerne opstår. Vi vil nu bestemme $N(50)$:



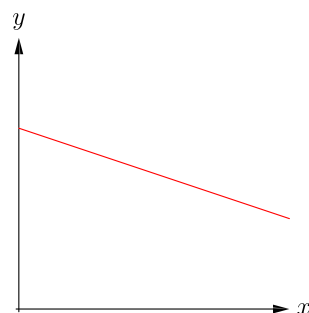
Vi skal bestemme $N(50)$. Den består af alle de punkter som har en funktionsværdi på 50. så derfor tegnes en vandret flade ind i koordinatsystem med en højde på 50.



Der hvor fladen skærer grafen for f , må være der hvor f har værdier 50. Så vi har tegnet en kurve, som følger skæringen mellem f og fladen. Dette er niveaulinjen $N(50)$.



Nu fjernes alt undtagen niveaukurven.



Koordinatsystemet drejes nu, så man ser det fra oven (som om vi står på toppen af z-aksen og kigger ned). Tadaaaa! en helt normal niveaulinje.

3.4 Lineær programmering uden computer

Vi har gjort brug af GeoGebra til at regne opgaverne, men det er nemt at regne dem uden GeoGebra. Det tager bare lidt længere tid.

Vi vender tilbage til det første eksempel i første afsnit og regner det nu uden computer:

En tøjproducent producerer trøjer og bukser.

Producenten har 120 m^2 bomuld og 130 m^2 polyester på lager.

Der går $1,5 \text{ m}^2$ bomuld og $0,5 \text{ m}^2$ polyester til en trøje.

Der går 1 m^2 bomuld og 2 m^2 polyester til et par bukser.

Dækningsbidraget er 300 kr. for en trøje og 400 kr. for et par bukser.

Hvor mange trøjer og hvor mange bukser skal der produceres få det størst mulige samlede dækningsbidrag? Hvad bliver det maksimale dækningsbidrag?

Opstilling af skema

	Trøjer	Bukser	Til rådighed
Bomuld	$1,5 \text{ m}^2$	1 m^2	120 m^2
Polyester	$0,5 \text{ m}^2$	2 m^2	130 m^2
Dækningsbidrag	300 kr.	400 kr.	

Kriteriefunktionen

Vi sætter

x = Antal producerede trøjer
 y = Antal producerede bukser

Dækningsbidraget må dermed være givet ved:

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

Polygonområde

Ud fra skemaet ses at

$$1,5x + y \leq 120$$

For polyester må der gælde:

$$0,5x + 2y \leq 130$$

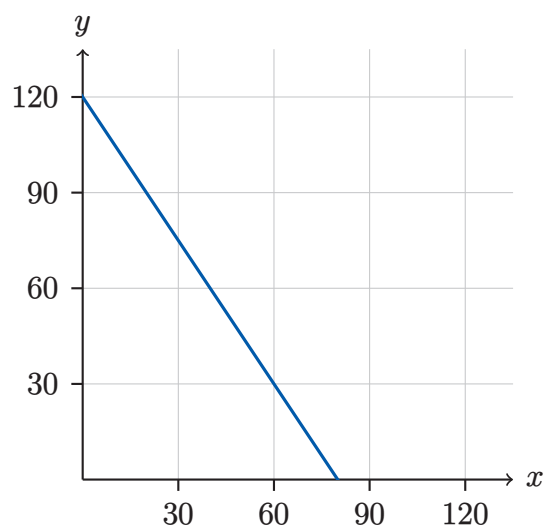
Da vi ikke kan producere et negativt antal trøjer eller bukser har vi:

$$x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

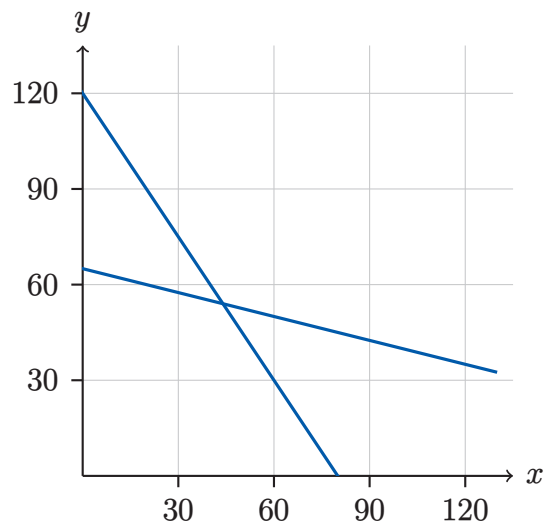
Vi skal tegne polygonområdet, men denne gang med papir og blyant. Vi starter med den første ulighed og isolerer y :

$$\begin{aligned} 1,5x + y &\leq 120 \\ y &\leq -1,5x + 120 \end{aligned}$$

Vi kan nu tegne uligheden. I første omgang lader vi som om, der står et lighedstegn i stedet for ulighedstegnet. Vi kan så tegne linjen ud fra hældning $(-1,5)$ og skæringspunkt med y -aksen (120) :

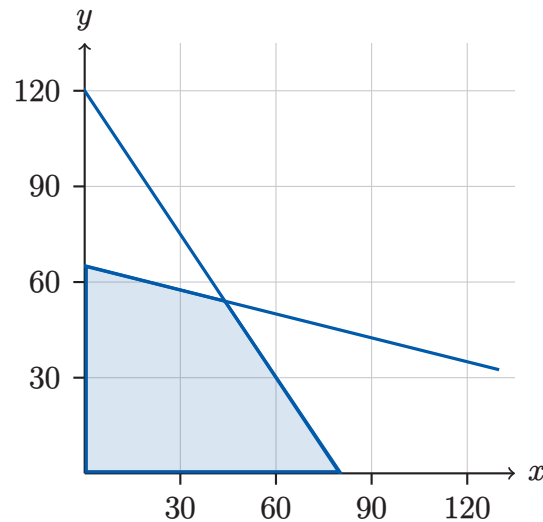


Vi isolerer y i den næste ulighed, hvilket giver $y \leq -0,25x + 65$, og tegner den ind:



Nu husker vi at der stod $y \leq \dots$ i begge de to uligheder. Det betyder at vi er begrænset til de punkter som ligger under linjerne (de må godt ligge på en linje, men ikke over en linje). Vi husker også ulighederne

$x \geq 0$ og $y \geq 0$, hvilket betyder at vi er begrænset til punkter, som har ikke-negative koordinater. Det giver os et område vi kan farve lyseblåt:



Niveaulinjer

Vi skal nu tegne niveaulinjer. Det er den mest problematiske del fordi det kræver, at man prøver sig lidt frem før man finder nogle gode linjer.

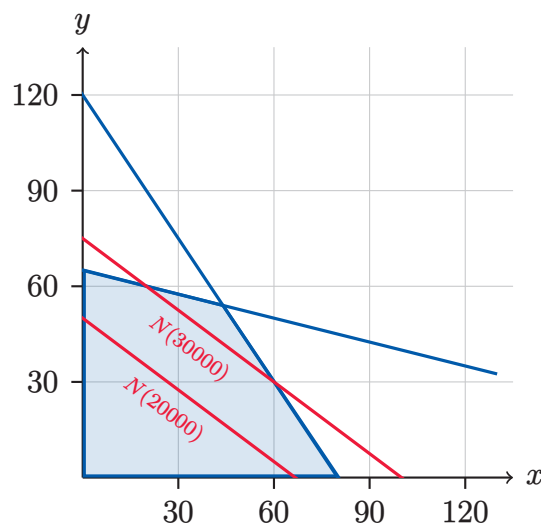
Vi vil nu tegne $N(20000)$ og $N(30000)$. For at finde dem skal vi sætte $f(x, y) = 20000$ og $f(x, y) = 30000$. Det giver:

$$300x + 400y = 20000 \quad \text{og} \quad 300x + 400y = 30000$$

Isolerer vi y i disse ligninger fås

$$y = -0,75x + 50 \quad \text{og} \quad y = -0,75x + 75$$

Disse to linjer kan vi nu tegne ind:



Ud fra niveaulinjerne ses det at niveauerne vokser skråt op til højre, og at det optimale punkt således ligger i skæringspunktet mellem de to skrå begrænsningslinjer.

Bestemmelse af det optimale punkt

Nu skal vi bare bestemme koordinaterne til det punkt vi har fundet. Vi har allerede isoleret y i de to skrå begrænsningslinjer og vi fik (når man erstatter ulighedstegn med lighedstegn):

$$y = -1,5x + 120 \quad \text{og} \quad y = -0,25x + 65$$

Vi regner nu skæringspunktet ved at sætte de to funktionsudtryk lig hinanden.

$$-1,5x + 120 = -0,25x + 65$$

Løser vi den ligning får vi $x = 44$. Vi kan nu regne y -værdien ved at sætte 44 ind i en af de to forskrifter for begrænsningslinjerne:

$$y = -1,5 \cdot 44 + 120 = 54$$

Skæringspunktet er altså (44, 54). Det betyder at vi skal producere 44 trøjer og 54 bukser for at få det maksimale dækningsbidrag. Det maksimale dækningsbidrag finder vi ved at sætte punktets koordinater ind i f :

$$f(44, 54) = 300 \cdot 44 + 400 \cdot 54 = 34800$$

Vi konkluderer, at det optimale dækningsbidrag er 34800 kr.

Øvelse 3.4.1

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbanar og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120 g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbanar til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

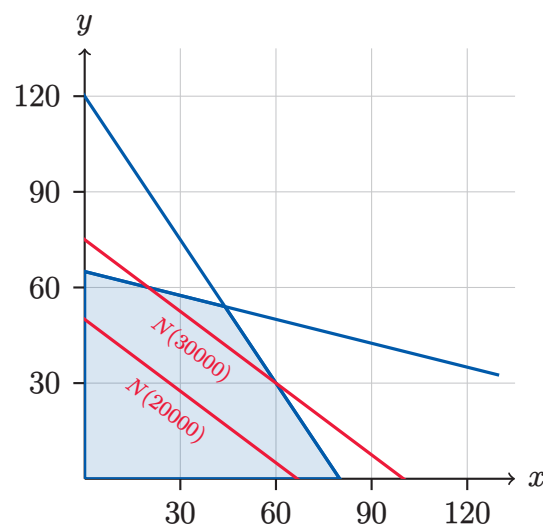
- a) Bestem (uden GeoGebra), hvad eleven skal putte i poserne og bestem den samlede udgift pr. pose.
- b) Pludselig falder prisen på miniskumbanar til 0,75 kr. stk. Hvad skal hun nu putte i poserne og hvad vil det koste hende? GeoGebra er stadig haram.
- c) Prisen på miniskumbanar falder nu yderligere til 0,25 kr. stk. Hvad skal hun nu putte i poserne og hvad vil det koste hende? GeoGebra er stadig haram.

3.5 Følsomhedsanalyse (A)

Dette afsnit forudsætter, at du kan løse dobbeltuligheder. Hvis du ikke har helt styr på, hvordan man løser dobbeltuligheder, så regn afsnittet om uligheder i første kapitel af b-bogen.

Vi har tidligere set at hvis der sker tilstrækkelige store ændringer i kriteriefunktionen, så vil vi få et nyt optimalt punkt. Følsomhedsanalyse går ud på at undersøge, hvor store ændringerne må være, før vi får et nyt optimalt punkt.

Vi tager udgangspunkt i eksemplet med trøjer og bukser fra sidste afsnit (lineær programmering uden computer). Hvis dette afsnit ikke er friskt i hukommelsen, så læs (regn) det igen. I afsnittet fandt vi ud af at det mest optimale var at producere 44 trøjer og 54 bukser. Punktet fandt vi som skæringspunkt mellem de to røde begrænsningslinjer:

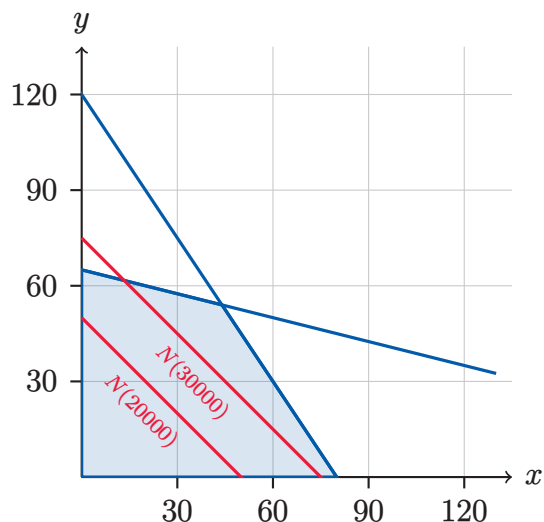


Lad os nu sige at dækningsbidraget for trøjer stiger til 400 kr. pr. stk., mens at dækningsbidraget for bukser er uændret. Det giver os

kriteriefunktionen:

$$f(x, y) = 400x + 400y$$

Tegner vi $N(20000)$ og $N(30000)$ ser de nu således ud



Vi kan se at niveaulinjerne er blevet stejlere. Vi kan også se at det optimale punkt er uændret, men hvis dækningsbidraget for trøjer bliver ved med at stige, vil niveaulinjerne på et tidspunkt blive så stejle, at det optimale punkt rykker til det nedre højre hjørne i polygonområdet. Begynder dækningsbidraget for trøjer pludseligt at falde meget, vil niveaulinjerne omvendt flade ud, og vi kan risikere at det optimale punkt rykker op i det øvre venstre hjørne.

Vi vil nu regne ud hvor meget dækningsbidraget for trøjer kan ændre sig, før at vi får et nyt optimalt punkt. Vi husker sætning 3.3.1 som sagde at niveaulinjerne for $f(x, y) = ax + by + c$ er givet ved ligningen:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Niveaulinjerne har altså en hældning på $-\frac{a}{b}$. Vi husker kriteriefunktio-

nen var

$$f(x, y) = 300x + 400y$$

så $a = 300$ og $b = 400$. Da vi vil undersøge hvor meget dækningsbidraget for trøjer kan ændre sig vil vi regne med a som ubekendt. Niveaulinjerne får på den måde hældningen $-\frac{a}{400}$. Denne hældning skal ligge imellem hældningen for de to omkringliggende begrænsninger, hvis det optimale punkt skal være uændret. Vi husker (fra sidste afsnit), at de to røde begrænsningslinjer har forskrifterne:

$$y = -1,5x + 120 \quad \text{og} \quad y = -0,25x + 65$$

Så hældningerne for begrænsningslinjerne er hhv. $-1,5$ og $-0,25$. Niveaulinjens hældning ($-\frac{a}{400}$) skulle ligge mellem de to, så vi får dobbeltuligheden:

$$-1,5 \leq -\frac{a}{400} \leq -0,25$$

Vi ganger dobbeltuligheden igennem med -400 . Vi husker at vende ulighedstegn fordi vi ganger med et negativt tal. Vi får:

$$600 \geq a \geq 100$$

Vi konkluderer at dækningsbidraget for trøjer kan falde ned til 100 kr. pr. trøje og stige op til 600 kr. pr. trøje uden at vi får et nyt optimalt punkt.

Vi kan også undersøge hvor meget dækningsbidraget for bukser kan ændre sig uden at vi får et nyt optimalt punkt. Det gøres på helt tilsvarende måde. Denne gang er det b som er ubekendt og niveaulinjerne vil altså have en hældning på $-\frac{300}{b}$. Vi kan så, helt som før, opstille dobbeltuligheden:

$$-1,5 \leq -\frac{300}{b} \leq -0,25$$

Vi ganger igennem med $-b$ og husker at vende ulighedstegnet (vi forudsætter at b er positivt her, så $-b$ er et negativt tal).

$$1,5b \geq 300 \geq 0,25b$$

Vi løser nu dobbeltuligheden ved at dele den op i to uligheder:

$$1,5b \geq 300 \quad \text{og} \quad 300 \geq 0,25b$$

Disse to uligheder er nemme at løse, og vi får

$$b \geq 200 \quad \text{og} \quad b \leq 1200$$

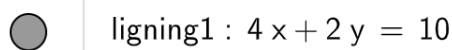
Dækningsbidraget for bukser kan altså bevæge sig mellem 200 kr. pr. buks til 1200 kr. pr. buks, uden at vi får et nyt optimalt punkt.

GeoGebra-tricket

Følsomhedsanalyse kræver, at vi har hældningerne på de omkringliggende begrænsningslinjer. Derfor skal vi have begrænsningerne på formen $y = \dots$. Vi kan bruge GeoGebra til at omskrive begrænsningerne:

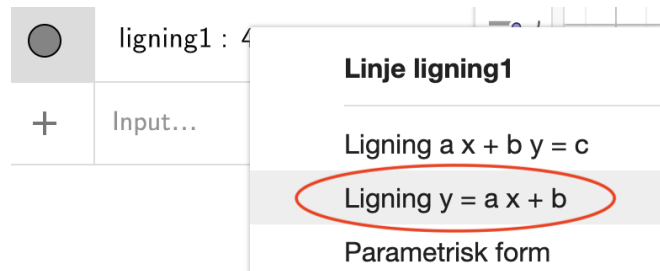
Eksempel 3.5.1

Antag at vi har en begrænsning givet ved $4x + 2y \leq 10$. Vi taster uligheden ind (men som ligning) i GeoGebra:

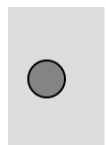


ligning1 : $4x + 2y = 10$

Vi højreklikker på linjen og vælger $y = ax + b$:



Vi kan nu aflæse forskriften:



$$\text{linje1 : } 4x + 2y = 10$$

$$= y = -2x + 5$$

Begrænsningslinjen har altså ligningen $y = -2x + 5$ og begrænsningen er dermed $y \leq -2x + 5$.

Øvelse 3.5.1

En virksomhed producerer to produkter OMEGALUL og KEKW. Produktionen er underlagt begrænsningerne:

$$4x + y \leq 32$$

$$2x + y \leq 18$$

$$x + y \leq 12$$

$$0 \leq y \leq 8$$

$$x \geq 0$$

Dækningsbidraget for OMEGALUL er 30 kr. pr. stk. og dækningsbidraget for KEKW er 20 kr. pr. stk.

- a) Hvor mange af hvert produkt skal der produceres for at maksimere dækningsbidraget?

- b) Hvad skal dækningsbidraget for OMEGALUL ligge imellem, hvis den optimale produktion skal være uændret?
- c) Hvor meget kan dækningsbidraget for OMEGALUL stige/falde, hvis den optimale produktion skal være uændret?
- d) Hvor meget kan dækningsbidraget for KEKW stige/falde, hvis den optimale produktion skal være uændret?

Øvelse 3.5.2

En elev vil sælge slikposer i kantinen. Hun reklamerer med:

Billige slikposer. Kom og køb. Du får miniskumbananer og/eller piratos. Mindst 20 stykker slik i hver pose. Mindst 120g i posen!

En miniskumbanan vejer 9 gram og en piratos vejer 4 gram.

Eleven kan indkøbe miniskumbananer til 2 kr. pr. stk. og piratos til 50 øre pr. stk.

Eleven vil gerne minimere sine omkostninger.

- a) Bestem, hvad eleven skal putte i poserne, hvis hun vil minimere udgiften pr. pose.
- b) Hvor meget må prisen på skumbananer ændre sig, hvis det optimale indhold i poserne skal forblive det du regnede ud i punkt a)?
- c) Hvor meget må prisen på piratos ændre sig, hvis det optimale indhold i poserne skal forblive det du regnede ud i punkt a)?

3.6 Beviser til lineær programmering

Sætning 3.3.1

Lad $f(x, y) = ax + by + c$, antag at $b \neq 0$ og lad t være et tal. Da er niveaukurven $N(t)$ en linje med forskriften:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t - c}{b}$$

Ændres t vil linjen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis b er positiv vil en højere t -værdi forskyde linjen op.
- Hvis b er negativ vil en højere t -værdi forskyde linjen ned.

Bevis

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved ligningen

$$f(x, y) = t$$

Vi indsætter forskriften for f

$$ax + by + c = t$$

Vi trækker ax og c fra på begge sider

$$by = t - ax - c$$

Vi omskriver højresiden

$$by = -ax + t - c$$

Nu divideres med b på begge sider (og det går godt fordi vi har antaget at $b \neq 0$).

$$y = \frac{-ax + t - c}{b}$$

Vi deler brøken op:

$$y = \frac{-ax}{b} + \frac{t-c}{b}$$

Vi omskriver første brøk:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{t-c}{b}$$

Vi ser at niveaukurven har form som en lineær funktion med hældningen $-\frac{a}{b}$. Hældningen ikke af t , og niveaulinjerne må derfor være parallelle.

Vi ser, at niveaulinjerne skærer y -aksen i $\frac{t-c}{b}$. Her vil tælleren blive større, hvis t bliver større. Hvis $b > 0$ må det betyde, at hele brøken bliver større og linjen vil dermed blive forskudt op ad. Hvis $b < 0$ vil brøken blive mindre når tælleren er bliver større, og derfor vil linjen blive forskudt nedad, når t bliver større.

Kapitel 4

Kvadratisk programmering

Kvadratisk programmering er lidt som lineær programmering, men i stedet for at optimere lineære funktioner i to variable, vil vi optimere såkaldte kvadratiske funktioner i to variable. Det bliver sjovt med masser af god matematik.

4.1 Introduktion til kvadratisk programmering

I kvadratisk programmering kigger vi på funktioner af typen:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e \quad , \quad \text{hvor } a \text{ og } c \text{ ikke begge er nul.}$$

Den slags funktioner kaldes *kvadratiske funktioner i to variable* fordi de indeholder to variable, hvoraf en eller begge indgår i anden potens.

Kvadratisk programmering er lidt som lineær programmering – bare

mere besværligt, så lad os da lige starte med at repetere noget lineær programmering.

Repetition af lineær programmering

Øvelse 4.1.1

Betragt ulighederne:

$$y \leq 6 \quad , \quad x + 2y \leq 14 \quad , \quad 2x + y \leq 16, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

- a) Tegn polygonområdet givet ved ulighederne (du må gerne bruge GeoGebra). Gem dit polygonområde. Du skal bruge det i næste øvelse.

Vi husker at man regner niveaulinjen $N(t)$ ved at opstille ligningen:

$$f(x, y) = t.$$

Den fremkomne ligning kan så testes i GeoGebra.

Eksempel 4.1.1

Betragt forskriften for en lineær funktion i to variable:

$$f(x, y) = x + 4y.$$

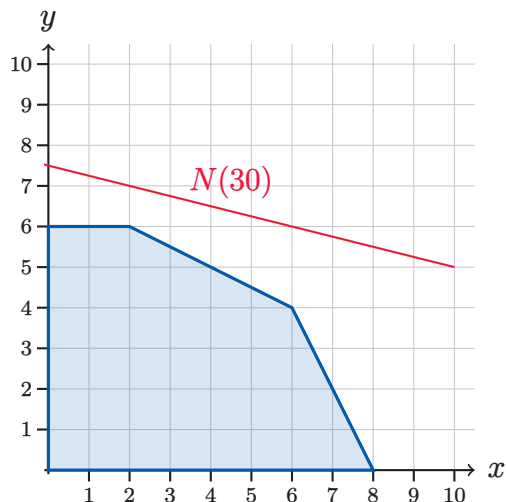
Vi vil tegne niveaulinjen $N(30)$ ind i polygonrådet fra ovenstående øvelse. Vi skal altså opstille ligningen:

$$f(x, y) = 30.$$

Vi indsætter vores forskrift i ligningen:

$$x + 4y = 30.$$

Denne ligning kan vi taste ind i GeoGebra og man får noget i stil med:



Øvelse 4.1.2

Med udgangspunkt i eksemplet ovenover:

- Opstil ligningen for niveaulinjen $N(40)$
- Indtegn $N(30)$ og $N(40)$ i dit polygonområde fra øvelse 4.1.1.
- Bestem ud fra niveaulinjerne maksimumspunktet for f .
- Bestem maksimumsværdien for f .

Niveaukurver for kvadratiske funktioner i to variable

I forbindelse med kvadratiske funktioner i to variable, kan vi også opstille ligningen:

$$f(x, y) = t.$$

Dette vil dog ikke give os en linje (se nedenstående øvelse). Derfor taler vi om *niveaukurver* i stedet for niveaulinjer.

Eksempel 4.1.2

Lad

$$f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 41.$$

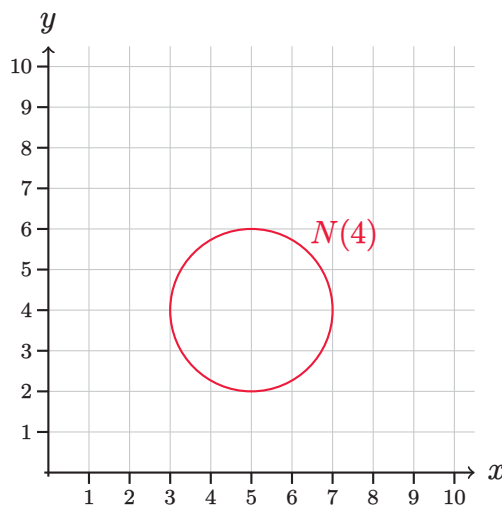
Vi vil nu bestemme en ligning for $N(4)$:

$$f(x, y) = 4$$

Vi indsætter forskriften og får den ønskede ligning.

$$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 41 = 4$$

Hvad mon den ligning udtrykker? Lad os prøve at taste den ind i en graftegner.



Det gav en cirkel. Interessant.

Man kunne nu tro at niveaukurver for kvadratiske funktioner altid er cirkler, men som vi skal se i næste øvelse, er der flere muligheder.

Øvelse 4.1.3

Tegn $N(10)$ i GeoGebra for følgende kvadratiske funktioner, og beskriv hvilken figur niveaukurven danner.

a) $f(x, y) = 2x^2 - 24x - y + 85$

b) $f(x, y) = x^2 - 8x + 9y^2 - 54y + 98$

Det viser sig at formen på niveaukurven afhænger af koefficienterne a og c i forskriften for den kvadratiske funktion:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

Der gælder følgende resultat som vi vil bevise senere:

Værdi af a og c	Niveaukurverne er
$c = 0$	Parabler
$a = c$	Cirkler
a og c har samme fortegn	Ellipser

Der er selvfølgelig også andre muligheder for a og c , men mulighederne i tabellen udgør dem vi møder her på HHX. Vi bemærker at en cirkel bare er en særligt pæn ellipse, så vi møder kun to grundlæggende situationer her: Enten er $c = 0$ og ellers har a og c samme fortegn.

Øvelse 4.1.4

Bestem ud fra forskriften (ikke noget GeoGebra), hvilken type niveaukurver funktionen har.

a) $f(x, y) = x^2 + x + y^2 - 3y - 234$

b) $f(x, y) = -3x^2 + 5x - y^2 + 123$

c) $f(x, y) = -x^2 - 3x + y$

4.2 Kvadratisk programmering når c er nul

Så en kvadratiske funktion i to variable er altså en funktion på formen:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

I dette afsnit vil vi begrænse os til kvadratiske funktioner, hvor $c = 0$, $a \neq 0$ og $d \neq 0$. Altså funktioner på formen:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + dy + e.$$

Der er to forskellige situationer, vi kan havne i, når vi laver kvadratisk programmering med funktioner på denne form. Vi skal nu se et eksempel på den første situation.

Eksempel 4.2.1

(Situation 1)

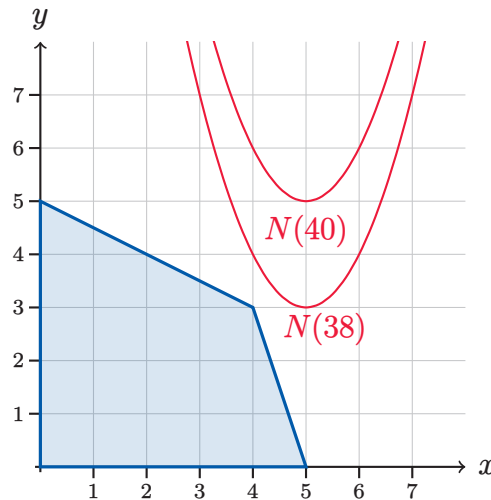
Vi vil finde maksimum for funktionen

$$f(x, y) = -x^2 + 10x + y + 10$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet samt niveaukurverne $N(38)$ og $N(40)$.



Vi ser at niveaukurverne er parabler og at en høj placering af parablen svarer til et højt niveau. Nu gælder det bare om at finde den højst mulige placering af parablen som har mindst et punkt til fælles med polygonområdet. Det er tydeligt ud fra tegningen at det sker i hjørnepunktet mellem de to begrænsningslinjer. Altså skæringspunktet mellem linjerne

$$x + 2y = 10 \quad \text{og} \quad 3x + y = 15$$

Regner man skæringspunkt ud får man $(4, 3)$ og sætter vi dem ind i $f(x, y)$ får vi værdien 37. Altså er maksimumsstedet $(4, 3)$ og maksimumsværdien er 37.

Øvelse 4.2.1

Du skal nu regne ovenstående eksempel igennem selv. Dvs.

- Tegn polygonområdet i GeoGebra.
- Tegn nogle forskellige niveaukurver som du kan bruge til at afgøre, hvilket punkt der er det optimale. I princippet er du

nødt til at prøve dig frem, men nu har du eksemplet at gå ud fra, så du ved at $N(38)$ og $N(40)$ er velegnede.

- c) Beregn det relevante hjørnepunkt.
- d) Beregn maksimumsværdien.

Øvelse 4.2.2

Med udgangspunkt i det samme polygonområde som sidste øvelse, altså

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0,$$

skal du med metoden fra øvelsen bestemme maksimum og minimum for følgende funktioner.

- a) $f(x, y) = x^2 - 18x + y + 76$
- b) $f(x, y) = x^2 + 2x - 2y + 1$

Ud fra det vi har set indtil videre, kunne man godt tro, at kvadratisk programmeringsopgaver kan regnes med hjørnepunktsinspektion ligesom lineær programmering. Alle de eksempler, vi har set, har nemlig optimale punkter i hjørnepunkterne af polygonområdet. Men sådan er det ikke... heldigvis, fordi vi elsker jo at lære noget nyt, right?

Eksempel 4.2.2

(Situation 2)

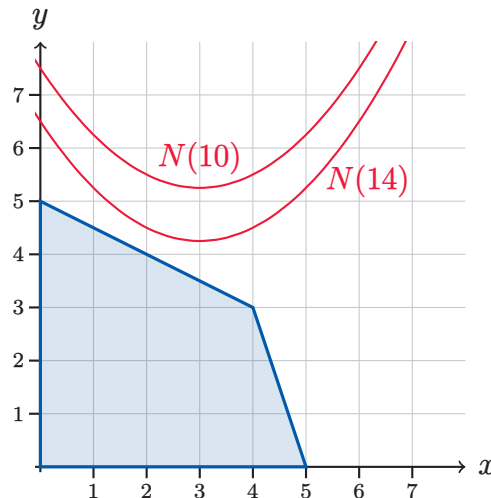
Vi vil finde minimum for funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 6x - 4y + 40$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet og niveaukurverne $N(10)$ og $N(14)$:



Vi ser at niveaukurverne er parabler og at en høj placering af parablen svarer til et lavt niveau. Vi leder efter minimum, så vi skal altså finde den højst mulige placering af parablen som har mindst et punkt til fælles med polygonområdet. Vi ser at punktet denne gang ikke ligger i et hjørne. Åh nej. Vi kan se, at det må ligge et sted på begrænsningslinjen $x + 2y = 10$. Vi finder punktet ved først at isolere y i denne begrænsningslinje. Det giver:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Da det punkt vi leder efter ligger på den linje, må punktet opfylde ligningen. Altså må y -koordinaten til punktet være bestemt ved $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Vi kan derfor erstatte y med $-\frac{1}{2}x + 5$ i forskriften for f :

$$\begin{aligned} f\left(x, -\frac{1}{2}x + 5\right) &= x^2 - 6x - 4\left(-\frac{1}{2}x + 5\right) + 40 \\ &= x^2 - 4x + 20 \end{aligned}$$

Dvs. vores funktion af to variable $f(x, y)$ er nu blevet forvandlet til en funktion af én variabel. Vi kan kalde den $g(x)$. Vi har altså fået

reduceret vores problem til at bestemme minimum for funktionen

$$g(x) = x^2 - 4x + 20.$$

Minimum kan bestemmes ved at løse ligning $g'(x) = 0$, hvilket giver løsningen $x = 2$. Vi husker at punktet ligger på linjen $y = -\frac{1}{2}x + 5$, så vi kan regne y -koordinaten ved at sætte $x = 2$ ind i denne ligning, hvilket giver $y = 4$.

Vi kan nu bestemme minimumsværdien ved at sætte punktet $(2, 4)$ ind i $f(x, y)$, hvilket giver 16.

Øvelse 4.2.3

Vi kigger på situationen fra ovenstående eksempel. Altså funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 6x - 4y + 40$$

begrænset af

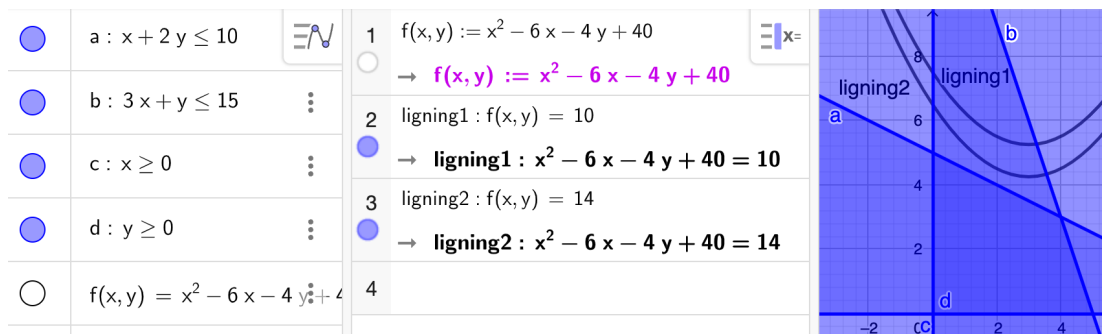
$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

- a) Regn minimumspunktet og minimumsværdien for funktionen (indenfor polygonområdet). Jaja det er sådan set gjort i eksemplet, men du skal udfylde de detaljer der mangler i eksemplet.
- b) Regn maksimumspunktet og maksimumsværdien for funktionen (indenfor polygonområdet).

Når det optimale punkt ikke ligger i et hjørnepunkt bliver det hurtigt lidt beregningstungt at bestemme det. Derfor er det en god idé at kunne gøre det helt i GeoGebra.

Eksempel 4.2.3

Vi vil regne spørgsmål a) fra øvelsen ovenover og gøre alt i GeoGebra. Vi tegner først polygonområdet og niveau:



Vi identificerer den relevante begrænsningslinje til at være $x + 2y = 10$. Vi isolere y (hovedregning) og får

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Nu regner vi funktionen $g(x) = f(x, -\frac{1}{2}x + 5)$ og løser ligningen $g'(x) = 0$

4	$g(x) := f\left(x, -\frac{1}{2}x + 5\right)$
	$\rightarrow g(x) := x^2 - 4x + 20$
5	Løs($g'(x) = 0$)
	$\rightarrow \{x = 2\}$

Vi finder y-værdien til minimumspunktet og regner minimumsværdien:

6	$-\frac{1}{2} \cdot 2 + 5$
☐	$\rightarrow 4$
7	$f(2, 4)$
☐	$\rightarrow 16$

Det er vigtigt, at man er i stand til at regne opgaver med så lidt brug af GeoGebra som muligt. Men man kan ikke nå igennem opgaverne hvis man vælger at regne i hånden hver gang. Derfor anbefaler jeg, at man skifter til at bruge GeoGebra, så snart man er tryk ved at regne i hånden.

Øvelse 4.2.4

Lad

$$f(x, y) = -x^2 + 10x + y + 86,$$

og lad et polygonområde være givet ved:

$$x + y \leq 7 \quad , \quad 2x + y \leq 10, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

- Tegn polygonområdet i GeoGebra.
- Bestem i hvilken retning f vokser, ved at tegne to niveaukurver i GeoGebra.
- Beregn maksimumsstedet.
- Bestem maksimumsværdien.

4.3 Kvadratisk programmering når a og c har samme fortegn

Vi ser igen på den kvadratiske funktion:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

Men nu begrænser vi os til at situationer, hvor a og c har samme fortegn og niveaukurverne dermed er ellipser. I dette tilfælde er der tre forskellige situationer vi skal lære at håndtere. De første to minder meget om det vi allerede har set.

Eksempel 4.3.1

(Situation 1)

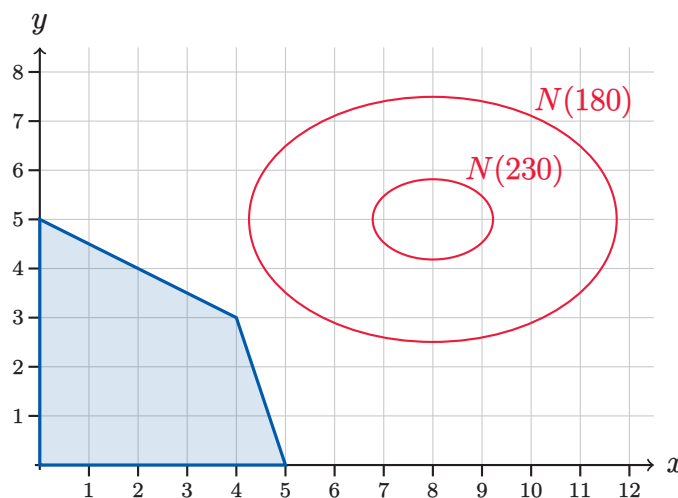
Vi vil finde maksimum for funktionen

$$f(x, y) = -4x^2 - 9y^2 + 64x + 90y - 245$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 3x + y \leq 15, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet samt niveaukurverne $N(180)$ og $N(230)$.



Vi ser at niveaukurverne er ellipser med samme centrum, og at en lille ellipse svarer til et højt niveau. Nu gælder det bare om at finde den mindste ellipse som har et punkt til fælles med polygonområdet. Det er tydeligt ud fra tegningen at det sker i hjørnepunktet mellem de to begrænsningslinjer. Altså skæringspunktet mellem linjerne

$$x + 2y = 10 \quad \text{og} \quad 3x + y = 15$$

Regner man skæringspunkt ud får man $(4, 3)$ og sætter vi dem ind i $f(x, y)$ får vi værdien 136. Altså er maksimumsstedet $(4, 3)$ og maksimumsværdien er 136.

Vi bemærker at metoden er helt tilsvarende det vi så i sidste afsnit.

Øvelse 4.3.1

Lad $f(x, y) = -x^2 + 12x - y^2 + 10y + 79$ og antag at f er begrænset af polygonområdet givet ved:

$$x + 3y \leq 15 \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

- Tegn polygonområdet og $N(138)$
- Bestem maksimumsstedet for f .
- Bestem maksimumsværdien for f .

Eksempel 4.3.2

(Situation 2)

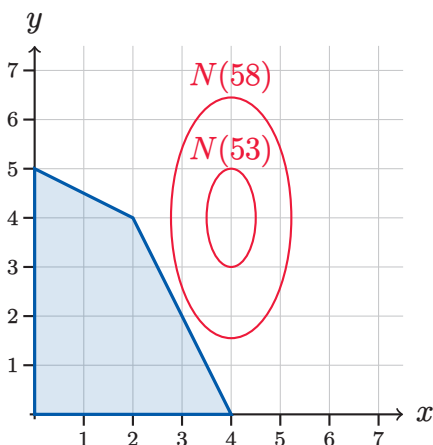
Vi vil finde minimum for funktionen

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 32x - 8y + 132$$

inden for polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$x + 2y \leq 10 \quad , \quad 2x + y \leq 8, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi tegner polygonområdet og niveaukurverne $N(53)$ og $N(58)$:



Vi ser at niveaukurverne er ellipser med samme centrum, og at en lille ellipse svarer til et lavt niveau. Da vi leder efter minimum skal vi finde den mindste ellipse som har et punkt til fælles med polygonområdet. Vi ser at punktet ligger på begrænsningslinjen $2x + y = 8$. Vi finder punktet ved først at isolere y i denne begrænsningslinje. Det giver:

$$y = -2x + 8$$

Da det punkt vi leder efter ligger på den linje, må punktet opfylde ligningen. Altså må y -koordinaten til punktet være bestemt ved $y = -2x + 8$. Vi kan derfor erstatte y med $-2x + 8$ i forskriften for f :

$$\begin{aligned} f(x, -2x + 8) &= 4x^2 + (-2x + 8)^2 - 32x - 8(-2x + 8) + 132 \\ &= 8x^2 - 48x + 132 \end{aligned}$$

Dvs. vores funktion af to variable $f(x, y)$ er nu blevet forvandlet til en funktion af én variabel. Vi kan kalde den $g(x)$. Vi har altså fået reduceret vores problem til at bestemme minimum for funktionen

$$g(x) = 8x^2 - 48x - 132.$$

Vi kan nu bestemme x -værdien til minimumspunktet ved at løse ligningen

$$g'(x) = 0,$$

hvilket giver løsningen $x = 3$. Vi husker at minimumspunktet ligger på linjen $y = -2x + 8$, så vi kan regne y -koordinaten ved at sætte $x = 3$ ind i denne ligning, hvilket giver $y = 2$.

Vi kan nu bestemme minimumsværdien ved at sætte punktet $(3, 2)$ ind i $f(x, y)$, hvilket giver 60.

Igen... helt tilsvarende metoden fra sidste afsnit.

Øvelse 4.3.2

Lad $f(x, y) = x^2 - 12x + 2y^2 - 20y + 106$ og antag at f er begrænset af polygonområdet givet ved:

$$x + 3y \leq 18 \quad , \quad x + y \leq 8 \quad \text{og} \quad 2x + y \leq 13 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

- a) Tegn polygonområdet og $N(30)$
- b) Bestem minimumsstedet for f .
- c) Bestem minimumsværdien for f .

Eksempel 4.3.3

(Situation 3)

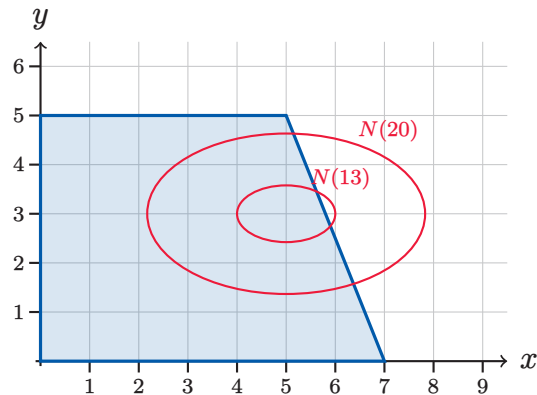
Vi vil finde minimum for funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 10x - 18y + 64$$

indenfor polygonområdet givet ved begrænsningerne

$$5x + 2y \leq 35 \quad , \quad 0 \leq y \leq 5 \quad \text{og} \quad x \geq 0$$

Vi tegner polygonområdet og niveaukurverne $N(20)$ og $N(13)$:



Da vi leder efter minimum skal vi finde den mindste ellipse som har et punkt til fælles med polygonområdet. Men da ellipsernes centrum ligger inden for polygonområdet, er der ingen grænser hvor små ellipserne kan være, og derfor må minimum ligge i ellipsernes centrum. Vi finder ellipsernes centrum i GeoGebra. Det er lige meget hvilken niveaukurve vi tager udgangspunkt i, da de alle har samme centrum. Her har jeg brugt $N(13)$ som har ligningen:

$$x^2 + 3y^2 - 10x - 18y + 64 = 13$$

Vi finder centrum i GeoGebra (vi skal senere lære at regne det selv) med kommandoen **Center**. Kommandoen refererer til et "keglesnit". Det er vores niveaukurve.

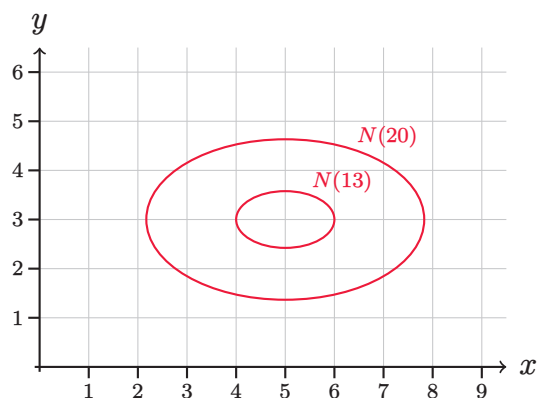
$$\begin{aligned} A &= \text{Center}(x^2 - 10x + 3y^2 - 18y + 64 = 13) \\ &= (5, 3) \end{aligned}$$

Altså er centrum for niveaukurverne $(5, 3)$, hvilket også er minimumspunktet.

Vi kan nu bestemme minimum ved at sætte punktet $(5, 3)$ ind i $f(x, y)$, hvilket giver 60.

Frie ekstrema

Lad os prøve noget sjovt. Vi fjerner polygonområdet fra sidste eksempel:



Det fremgår at f stadig har samme minimum (ellipsens centrum) som da vi begrænsede den til et polygonområde. Et ekstremum som opstår uafhængigt af et polygonområde kaldes et *frit ekstremum*. Funktionen f har altså frit minimum i $(5, 3)$. Ofte vil det frie ekstremum ligge udenfor polygonområdet, og der er derfor forskel på at spørge efter det frie minimum, eller funktionens minimum underlagt begrænsningerne.

Øvelse 4.3.3

Betragt polygonområdet:

$$0 \leq x \leq 6 \quad \text{og} \quad 0 \leq y \leq 4,$$

og lad

$$f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 + 10y + 18.$$

- a) Tegn polygonområdet.
- b) Tegn $N(40)$.
- c) Bestem det frie maksimum for f .
- d) Bestem maksimum for f indenfor polygonområdet.
- e) Bestem minimum for f indenfor polygonområdet.

Øvelse 4.3.4

Betragt polygonområdet:

$$x + y \leq 12 \quad , \quad x \geq 4 \quad \text{og} \quad y \geq 2,$$

og lad

$$f(x, y) = 27x^2 - 270x + 12y^2 - 144y + 1207$$

- a) Tegn polygonområdet og $N(208)$
- b) Bestem minimum for f indenfor polygonområdet.

I de næste afsnit skal vi se nærmere på den teoretiske grundlag for det vi har lavet i de 3 første afsnit.

4.4 Kvadratkomplettering

Vi skal nu i gang med at etablere det teoretiske grundlag for den kvadratiske programmering. I dette afsnit skal vi lære en algebraisk teknik kaldet *kvadratkomplettering*. Læg mærke til: **komplettering** – IKKE noget med at ”komplimentere” – det siger man kun, hvis man har et kvadrat, som trænger til et selvtillidsboost.

Vi husker kvadratsætningerne:

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$

Eksempel 4.4.1

Ved hjælp af den første kvadratsætningen kan vi regne:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2^2 + 2 \cdot x \cdot 2 = x^2 + 4x + 4$$

Øvelse 4.4.1

Regn ved hjælp af kvadratsætningerne:

a) $(x + 3)^2$

b) $(x - 1)^2$

c) $(a + 2q)^2 - a^2$

Vi skal nu lære en teknik til at omskrive udtryk på formen $x^2 + kx$ til udtryk som kun indholder ét x . Det kaldes *at kvadratkomplettere*. Man kan vise (se øvelse 4.4.2), at der gælder følgende omskrivning:

$$x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \quad (4.1)$$

Selvom udtrykket på højresiden måske ser mere kompliceret ud, vil den i mange tilfælde være nemmere at arbejde med. F.eks. kan man ved hjælp af omskrivningen løse andengradsligninger uden at bruge nulpunktsformlen whaaaaaat?

Øvelse 4.4.2

Vis at omskrivning (4.1) er korrekt. Start med højresiden og brug en kvadratsætning til at regne udtrykket.

Eksempel 4.4.2

Vi vil nu kvadratkomplettere udtrykket $x^2 + 6x$. Vi bruger omskrivning (4.1)

$$x^2 + 6x = \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = (x + 3)^2 - 9$$

Vi vil nu kvadratkomplettere udtrykket $x^2 - 6x$.

$$x^2 - 6x = \left(x + \frac{-6}{2}\right)^2 - \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (x - 3)^2 - 9$$

Man kan kvadratkomplettere uden at huske omskrivning (4.1). Følgende eksempel er måske lidt svært at følge, men den måde man vil kvadratkomplettere på, hvis man er pro. Hvis du ikke forstår det, så bare brug metoden fra de to ovenstående eksempler.

Eksempel 4.4.3

Vi vil vil kvadratkomplettere $x^2 + 6x$. Vi sammenligner med højre side af kvadratsætningen

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Vi kan se at x^2 ligner a^2 , så $a = x$, og $6x$ ligner det dobbelte produkt ($2ab$). Men hvis $6x$ skal være $2ab$, og $x = a$, så må b være 3. Altså har vi

$$(x + 3)^2.$$

Men dette udtryk giver ikke $x^2 + 6x$. Det giver $x^2 + 6x + 9$. Vi skal derfor trække 9 fra $(x + 3)^2$ for at ende med $x^2 + 6x$. Altså har vi:

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

Øvelse 4.4.3

Kvadratkompletter:

a) $x^2 + 8x$

b) $x^2 - 2x$

c) $x^2 + x$

d) $x^2 - ax$ (svær)

e) $x^2 - \frac{b}{a}x$ (svær)

Nogle gange vil man anvende kvadratkomplettering i udtryk hvor der optræder andre led. Så kvadratkompletterer man bare den relevante del af udtrykket og reducerer til sidst.

Eksempel 4.4.4

Vi vil nu kvadratkomplettere udtrykket $x^2 + 6x + 5$:

$$x^2 + 6x + 5 = \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 - \frac{6^2}{4} + 5 = (x + 3)^2 - 4$$

Øvelse 4.4.4

Kvadratkompletter:

a) $x^2 - 10x + 5$

b) $x^2 - 4x + 4$

Eksempel 4.4.5

Vi vil nu kvadratkomplettere $2x^2 + 12x$. Da der står noget foran x^2 må vi faktorisere først:

$$2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x)$$

Det, der står inden i parentes, kan vi nu kvadratkomplettere på normal vis:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x &= 2(x^2 + 6x) \\ &= 2((x + 3)^2 - 9) \\ &= 2(x + 3)^2 - 18 \end{aligned}$$

Øvelse 4.4.5

Kvadratkompletter:

- a) $2x^2 - 4x$
- b) $\frac{1}{2}x^2 - x$
- c) $ax^2 + bx$ (svær)

Eksempel 4.4.6

Vi vil nu kvadratkomplettere $2x^2 + 12x - 4$. Da der står noget foran x^2 må vi faktorisere først. Vi skal kun faktorisere den del, der skal kvadratkompletteres:

$$2x^2 + 12x - 4 = 2(x^2 + 6x) - 4$$

Det der står inden i parentesen kan vi nu kvadratkompletter:

$$\begin{aligned}2x^2 + 12x - 4 &= 2(x^2 + 6x) - 4 \\&= 2((x + 3)^2 - 9) - 4 \\&= 2(x + 3)^2 - 18 - 4 \\&= 2(x + 3)^2 - 22\end{aligned}$$

Øvelse 4.4.6

Kvadratkompletter:

a) $4x^2 - 24x + 4$

b) $cy^2 + dy + e$ (svær)

4.5 Parabler

I de følgende afsnit skal vi se nærmere på de geometriske figurer der dukker op i forbindelse med kvadratisk programmering. Vi starter med parablen, da I kender den allerede. Vi husker at en parabel er grafen for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvor $a \neq 0$. Når man konstruerer en graf, bliver funktions værdier $f(x)$ til y -værdier for grafen, og derfor kan ligningen for parablen skrives som

$$y = ax^2 + bx + c$$

Eksempel 4.5.1

Ligningen $x^2 + y = 3$ er ligning for en parabel. Det kan vi se ved at omskrive den så den får den sædvanlige form. Det gør vi ved at isolere y :

$$y = -x^2 + 3$$

Vi ser at den nu har form som en parabel $y = ax^2 + bx + c$.

Øvelse 4.5.1

Betragt ligningen $2x^2 - 2y + x + 4 = 0$

- a) Omskriv ligningen så den har form som en parabel.

Øvelse 4.5.2

Betragt ligningen $2x = 3y - 1$

- a) Undersøg om ligningen er ligning for en parabel.

Har vi en parabel og et punkt kan vi afgøre om punktet ligger på parabelen.

Eksempel 4.5.2

Vi vil nu undersøge om punktet $(1, 3)$ ligger på parabelen $y = 2x^2 - x + 2$. Vi indsætter punktets koordinater i stedet for x og y i ligningen:

$$3 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 2,$$

og reducerer

$$3 = 3.$$

Da ligningen passer må punktet ligge på parabelen.

Øvelse 4.5.3

- a) Undersøg om punktet $(2, 2)$ ligger på parabeln $y = x^2 - 1$

Øvelse 4.5.4

På mat-b lærte I betydningen af a , b og c i forskriften for andengradspolynomiet.

- a) Hvilken fortæller de om parabeln?

Det er betydningen af a og især c som vi for brug for at kende til snart. I forhold til a er det vigtigt at kunne bestemme krumningen ud fra a (konveks eller konkav). I forhold til c plejer man at sige, at grafen skærer y -aksen i c . Det er også rigtig nok, men vi har brug for at tænke på c på en lidt anden måde. Lad os sammenligne de to grafer $y = 2x^2 - 6x + 5$ og $y = 2x^2 - 6x + 7$. Vi kan se at de er ens bortset fra c -værdien. Men hvad betyder det i forhold til deres form og placering i koordinatsystemet? For en givet x -værdi er y -værdien for den anden graf 2 højere end y -værdien for den første. Altså er de to grafer ens, bortset fra at den anden graf er forskudt med to opad. Så ændrer man på c -værdien i en parabel vil det forskyde grafen op eller ned alt efter om c bliver højere eller lavere.

Øvelse 4.5.5

- a) Beskriv forskelle i form og placering af de to parabler $y = -x^2 + 2x + 1$ og $y = -x^2 + 2x - 4$.

4.6 Cirkler

Vi ved alle hvad en cirkel er, men skal vi regne på cirkler, har brug brug for en matematisk definition af en cirkel.

Definition 4.6.1

En cirkel med *radius* r og *centrum* C består af mængden af punkter med afstand r til C .

Læg mærke til, hvordan definitionen giver en matematisk præcis beskrivelse af det, vi intuitivt forstår som en cirkel. En cirklen er altså en samling af punkter, som har det tilfælles, at de alle har samme afstand ind til centrum. Vi fastlægger en cirkel ved dens ligning:

Sætning 4.6.1

En cirkel med radius r og centrum $C = (x_0, y_0)$ har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Lige som parablens ligning karakteriserer de punkter som ligger på parablen, karakteriserer cirkelns ligningen de punkter som ligger på cirklen. Altså, de punkter (x, y) som gør ligningen sand er netop de punkter som ligger på cirklen.

Eksempel 4.6.1

Vi vil bestemme en ligning for cirklen med radius 4 og centrum i $(2, -3)$. Vi indsætter i cirkelns ligning:

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$$

og får vores endelige ligning

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Læg mærke til at fortegnene inde i parenteserne er omvendte i forhold til punktets koordinater.

Øvelse 4.6.1

Opskriv ligningerne for:

- a) cirklen med centrum i $(1, 6)$ og radius 3.
- b) cirklen med centrum i $(-2, 2)$ og radius 2.
- c) cirklen med centrum i $(0, 0)$ og radius 1.

Eksempel 4.6.2

Ligningen

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

kan skrives som

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$

og ligningen angiver derfor en cirkel med radius 5 og centrum i $(-3, 5)$.

Øvelse 4.6.2

Følgende ligninger beskriver alle cirkler. Bestem centrum og radius:

a) $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 25$

b) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$

c) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

Eksempel 4.6.3

Vi vil afprøve om punktet $(3, -1)$ ligger på cirklen fra eksempel 4.6.1. I eksemplet fandt vi ligningen

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Vi indsætter nu punktets koordinater som x og y :

$$(3 - 2)^2 + (-1 - 3)^2 = 16$$

og reducerer

$$1 + 16 = 16.$$

Det passer næsten, men vi må konkludere at punktet ikke ligger på cirklen (men tæt på).

Øvelse 4.6.3

- a) Tjek ved beregning om punktet $(6, 0)$ ligger på cirklen med centrum i $(-3, -4)$ og radius 10.

Regner man parenteserne i cirkelns ligning kommer udtrykket til at se helt anderledes ud.

Eksempel 4.6.4

Vi vil nu regne parenteserne i cirkelns ligning fra eksempel 4.6.1.

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Vi bruger kvadratsætningen

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y = 16$$

og samler konstanter på højreside

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 16 - 4 - 9$$

og reducerer

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$$

Øvelse 4.6.4

- a) Opskriv en ligning for cirklen med radius 3 og centrum i $(-1, 2)$.
Skriv resultatet på udfoldet form som resultatet i eksempel 4.6.4.

Når vi fremover støder på cirkler vil det som regel være på udfoldet form (altså uden parenteser).

Eksempel 4.6.5

Vi vil undersøge om ligningen $x^2 + y^2 + 8x - 2y = -13$ kan være ligningen for en cirkel. Vi starter med at samle x 'erne og y 'erne

$$x^2 + 8x + y^2 - 2y = -13.$$

Nu kvadratkompletterer vi

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 = -13.$$

Vi samler konstanterne på højresiden

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = -13 + 16 + 1$$

og får

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

hvilket kan skrives som

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 2^2.$$

Vi kan altså se at vi har en cirkel med centrum i $(-4, 1)$ og radius 2.

Øvelse 4.6.5

Omskriv til cirkels ligning:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$

b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Øvelse 4.6.6

Bestem centrum og radius for cirklerne med ligningerne:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 11$

b) $x^2 + y^2 - 10x - 75 = 0$

Eksempel 4.6.6

Vi vil omskrive $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$, så den har form som cirkels ligning. Det nye i dette eksempel er, at der står et tal foran x^2 og y^2 (der står 3). Vi starter derfor med at dividere ligningen igennem med 3. Nu får vi:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4,$$

og denne ligning kan vi omskrive som i Eksempel 4.6.5.

Øvelse 4.6.7

- a) Gør eksempel 4.6.6 færdig. Altså omskriv $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ til cirkels ligning

Øvelse 4.6.8

Omskriv til cirkels ligning:

a) $2x^2 + 2y^2 + 20x + 12y = -50$

b) $4x^2 + 4y^2 - 20x - 8y = 115$

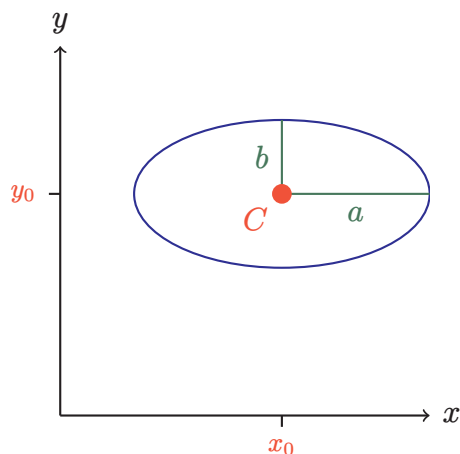
Øvelse 4.6.9

a) Bestem centrum og radius i cirklen med ligningen:

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 6y + 1 = 0$$

4.7 Ellipser

En ellipse er en cirkel der er ”strukket ud”. Her er et eksempel:



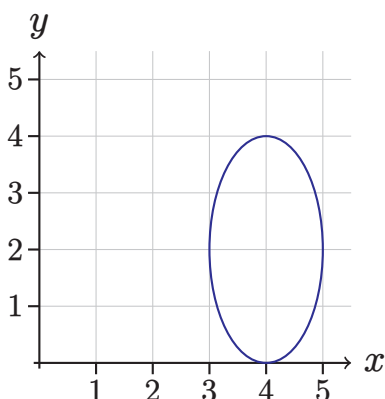
Figur 4.1: Ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$ og halvaksler a og b .

Ovenstående figur viser en ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$. Længden af stykket a kaldes ellipsens vandrette halvaksler og længden af stykket b kaldes ellipsens lodrette halvakse. Den største af de to halvaksler

kaldes også den *halve storakse* mens den mindste kaldes ellipsens *halve lilleakse*. Læg mærke til at a altid måles vandret og b lodret.

Øvelse 4.7.1

Betragt ellipsen:



- Bestem den vandrette halvakse, den lodrette halvakse og centrum for ellipsen.
- Bestem den halve storakse og den halve lilleakse.
- Bestem a , b , x_0 og y_0 for ellipsen.

Ligesom vi har cirkelns ligning har vi også ellipsens ligning:

Sætning 4.7.1

En ellipse med centrum i $C = (x_0, y_0)$ og halvaksler a og b har ligningen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.2)$$

Øvelse 4.7.2

Angiv centrum og halvakser for følgende ellipserne givet ved ligningerne:

a) $\frac{(x-9)^2}{25} + \frac{(y-14)^2}{16} = 1$

b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

c) $\frac{(x-5)^2}{5} + \frac{y^2}{81} = 1$

d) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Øvelse 4.7.3

En ellipse har vandret halvakse 4, lodret halvakse 2 og centrum i $(-2, 1)$

- a) Opskriv en ligning for ellipsen.
- b) Skriv ligningen på formen $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$.
- c) Tjek ved beregning om punktet $(-2, 1)$ ligger på ellipsen.

Øvelse 4.7.4

Betragt ellipsen med ligningen

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

- a) Tegn ellipsen med papir og blyant

Øvelse 4.7.5

Antag at vi har en ellipse, hvor de to halvaksler er ens.

- a) Hvilken figur har vi så?

Øvelse 4.7.6 (✚)

- a) Vis ud fra ellipsens ligning at en ellipse med ens halvaksler er en cirkel.
- b) Hvilken betydning har halvakslerne i dette tilfælde?

Eksempel 4.7.1

Vi vil vise at ligningen $4x^2 + y^2 - 16x + 6y = -9$ er ligning for en ellipse. Vi starter med at samle x 'erne og y 'erne:

$$4x^2 - 16x + y^2 + 6y = -9.$$

Nu faktorisere vi leddene med x (havde der stået en konstant foran y^2 , skulle leddene med y også faktoreres):

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 6y = -9.$$

Så kvadratkompletterer vi

$$4((x - 2)^2 - 4) + (y + 3)^2 - 9 = -9.$$

Så ganges parenteser ud:

$$4(x - 2)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 = -9,$$

og vi samler konstanterne på højresiden:

$$4(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -9 + 16 + 9,$$

og regner højresiden:

$$4(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Vi kan se på ellipsens ligning (4.2) at højresiden skal være 1, så vi dividerer med 16 på begge sider:

$$\frac{4(x - 2)^2}{16} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1.$$

Vi forkorter:

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1,$$

og skriver nævnerne som et kvadrat (noget i anden):

$$\frac{(x - 2)^2}{2^2} + \frac{(y + 3)^2}{4^2} = 1.$$

Ved sammenligning med ellipsens ligning (4.2) ses at vi har en ellipse med centrum i $(2, -3)$ og lille halvakse 2 og store halvakse 4. Puha det var hårdt arbejde, godt det ikke er mig som skal regne de efterfølgende øvelser.

Øvelse 4.7.7

Bestem ellipsens centrum og halvakser. Brug metoden fra ovenstående eksempel.

a) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y = 3$

b) $25x^2 + 4y^2 + 50x - 24y = 39$

c) $9x^2 + y^2 + 36x + 14y + 76 = 0$

d) $8x^2 + 32y^2 - 32x = 0$ (VINK: du kan forsimpler den først, ved

| at dividere igennem med et passende tal)

4.8 Mere om niveaukurver og frie ekstrema

I dette afsnit skal vi se på flere detaljer i forhold til at bestemme niveaukurver og frie ekstrema.

Når $c = 0$

Det er nemt at bestemme ligninger for niveaukurver når $c = 0$.

Eksempel 4.8.1

Lad $f(x, y) = 8x^2 - 4x - 2y + 6$. Vi vil bestemme en ligning for $N(40)$. Det gør vi ved at sætte $f(x, y) = 40$:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 40 \\8x^2 - 4x - 2y + 6 &= 40 \\-2y &= -8x^2 + 4x + 34 \\y &= 4x^2 - 2x - 17\end{aligned}$$

Vi konkluderer at ligningen for $N(40)$ er $y = 4x^2 - 2x - 17$. Vi ser at $N(40)$ er en parabel da ligningen har formen $y = ax^2 + bx + c$.

Vi vil også bestemme den generelle ligning for niveaukurven $N(t)$. Det kan gøres ligesom for $N(40)$, men denne gang vil jeg bruge GeoGebra CAS til at isolere y :

1 Løs($8 x^2 - 4 x - 2 y + 6 = t, y$) $\Rightarrow$ $\left\{ y = \frac{-1}{2} t + 4 x^2 - 2 x + 3 \right\}$

Vi ser at ligningen for $N(t)$ er:

$$y = 4x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}t.$$

Det kan være lidt svært lige at gennemskue at $N(t)$ er en parabel. Men husk at t er en konstant så udtrykket $3 - \frac{1}{2}t$ er også en konstant og det er det som er konstantleddet c i parablens ligning $y = ax^2 + bx + c$.

Øvelse 4.8.1

Lad $f(x, y) = -9x^2 + 3y + 12$

- Bestem en ligning for $N(6)$. Brug GeoGebra til at isolere y
- Bestem en ligning for $N(t)$. Isolér y uden GeoGebra.
- Gør rede for at $N(t)$ er en parabel.

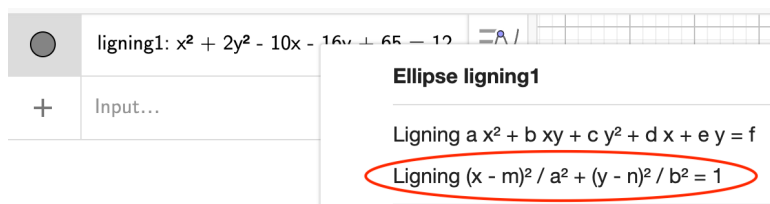
Når a og c har samme fortegn

Eksempel 4.8.2

Lad $f(x) = x^2 + 2y^2 - 10x - 16y + 65$. Vi vil gøre rede for at $N(12)$ er en ellipse og vi vil bestemme centrum og halvakser. Vi opstiller ligningen for niveaukurven $N(12)$ ved at sætte $f(x, y) = 12$:

$$x^2 + 2y^2 - 10x - 16y + 65 = 12$$

Vi kunne nu bruge det vi har lært i sidste afsnit og omskrive ligningen til ellipseform. Men det er hårdt arbejde, så vi vælger at ”snyde” lidt. Vi taster den ind i et **algebravindue** i GeoGebra og højreklikker på ligningen. Vi ser at man nu kan vælge ligningen på ellipseform:



Vi får altså:


$$\begin{aligned} \text{ligning1 : } & x^2 + 2y^2 - 10x - 16y + 65 = 12 \\ & = (x - 5)^2 / 4 + (y - 4)^2 / 2 = 1 \end{aligned}$$

Vi ser at niveaukurven nu er blevet omskrevet til ellipseform, hvilket må betyde at den er en ellipse. Vi kan også aflæse centrum $(5, 4)$ og halakser $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{2} \approx 1.41$.

Øvelse 4.8.2

Lad $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 229$

- a) Gør rede for at $N(120)$ er en ellipse.
- b) Bestem centrum og halvakser for $N(120)$
- c) Tegn $N(120)$

Det er ikke for alle værdier af t at $N(t)$ er en ellipse. Antag f.eks. at funktionen har et frit maksimum m . Da funktionen ikke kan blive højere end m kan det ikke lade sig gøre at tegne en niveaukurve, hvis $t > m$. Der er nemlig ingen punkter som vil opfylde ligningen for denne niveaukurve. Skal vi udtale os mere generelt om niveaukurverne når a og c har samme fortegn, har vi brug for følgende sætninger:

Sætning 4.8.1

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$, og antag at a og c har samme fortegn (som ikke er nul selvfølgelig). Da har f frit ekstremum i punktet

$$C = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c} \right)$$

med ekstremumsværdi

$$m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Hvis a og c er positive er det frie ekstremum et minimum ellers er det et maksimum.

Ovenstående sætning fortæller os altså hvordan vi finder det frie ekstremum. Når vi har det frie ekstremum kan vi finde ud af hvilke værdier af t som er mulige for niveaukurven $N(t)$:

Sætning 4.8.2

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$ og antag at f har frit ekstremum m .

Hvis $a > 0$, $c > 0$ og $t > m$ så er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en større ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$ så er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en mindre ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a = c$ i en af de to ovennævnte situationer, så er niveaukurverne tilmed cirkler.

Med de to sætninger kan beskrive niveaukurverne:

Eksempel 4.8.3

Lad $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 16x - 8y + 38$. Vi vil undersøge hvordan niveaukurverne ser ud. Vi regner først det frie ekstremum m :

$$\begin{aligned} m &= e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c} \\ &= 38 - \frac{(-16)^2}{4 \cdot 4} - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 1} \\ &= 38 - 16 - 16 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Da $a > 0$ og $c > 0$ kan vi ud fra sætning 4.8.2 konkludere at niveaukurverne $N(t)$ er ellipser for $t > 6$, hvor store ellipser svarer til høje niveauer.

Øvelse 4.8.3

Lad $f(x, y) = -x^2 - 4y^2 + 10x + 16y - 23$.

- a) Gør rede for at niveaukurverne $N(t)$ er ellipser for $t < 18$.
- b) Gør rede for at $N(10)$ er en ellipse
- c) Tegn $N(10)$

Ekstra

Vi har også en sætning, der fortæller os noget om niveaukurverne for parabler:

Sætning 4.8.3

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$.

Hvis $a \neq 0$, $d \neq 0$ og $c = 0$, så er niveaukurven $N(t)$ en parabel for alle værdier af t . Ændres t vil parablen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis d er positiv vil en højere værdi for t forskyde parablen op.
- Hvis d er negativ vil en højere værdi for t forskyde parablen ned.
- Hvis a og d har samme fortegn er der tale om en konkav parabel, ellers er den konveks.

Sammen med den tilsvarende sætning for ellipser (sætning 4.8.2) er de grundlaget for den teknik vi brugte i starten af kapitlet til at lave kvadratisk programmering. Den gang tegnede vi nemlig kun to niveaukurver, men tillod os at generalisere ud fra de to. Vi konkluderet f.eks.

at hvis vi havde en lille ellipse som svarede til et højt niveau og en større ellipse som svarede til et mindre niveau, så ville niveauerne blive ved med at falde i takt med at ellipserne blev større. De to sætninger er argumentet for at dette er rigtigt.

Grafer for kvadratiske funktioner i to variable

Du kunne måske tænkte at du allerede har set grafer for de kvadratiske funktioner i to variable, men niveaukurver er ikke grafer. I det sted kan man tænke på niveaukurver som vandrette snit igennem en graf (om lidt vil det fremstå mere klart hvad jeg mener med det).

Alle funktioner i to variable har grafer i tre dimensioner i stedet for to som vi er vant til. Lad os tage udgangspunkt i funktionen

$$f(x, y) = 0,64x^2 - 6,4x + y^2 - 10y + 41$$

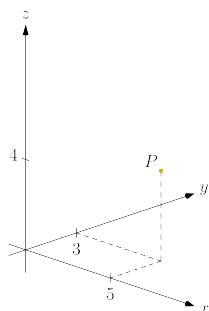
Vi kan tegne grafen ved at vælge et (x, y) , regne $f(x, y)$ og tegne punktet ind. Det svarer helt til det vi gjorde for funktioner i to variable. Lad os vælge punktet $(5, 3)$:

$$f(5, 3) = 0,64 \cdot 5^2 - 6,4 \cdot 5 + 3^2 - 10 \cdot 3 + 41 = 4$$

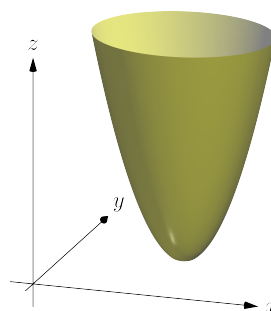
Det giver os punktet:

x	5
y	3
$f(x, y)$	4

Grafen konstrueres nu på følgende måde:

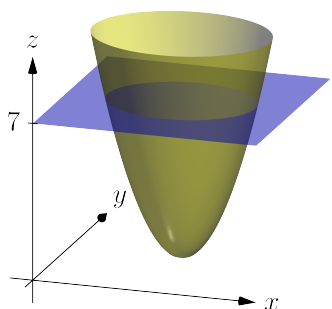


Først tegnes punktet ind.

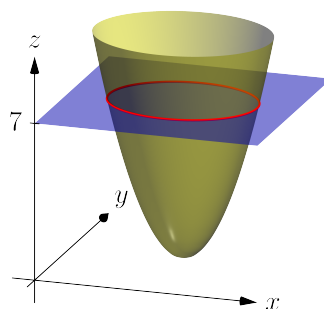


Grafen fremkommer når vi tegner rigtig mange punkter.

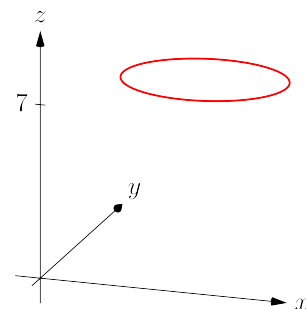
Niveaukurven kan nu konstrueres:



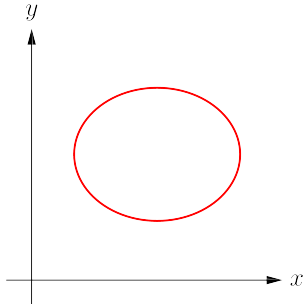
Nu bestemmes $N(7)$. Den består af alle de punkter som har en funktionsværdi på 7 så derfor tegnes en vandret flade ind i koordinatsystem med en højde på 7.



Der hvor fladen skærer grafen for f må være der hvor f har værdier 7. Så vi har tegnet en kurve som følger skæringen mellem f og fladen. Dette er niveaukurven $N(7)$.



Nu fjernes alt undtagen niveaukurven.



Koordinatsystemet drejes nu, så man ser det fra oven (som om vi står på toppen af z -aksen og kigger ned). Tadaaaa! en helt normal niveaukurve.

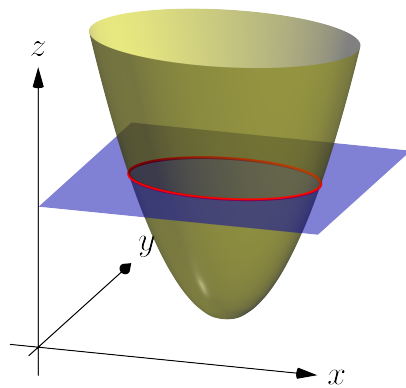
Øvelse 4.8.4

Vi kigger på grafen fra konstruktionen oven over.

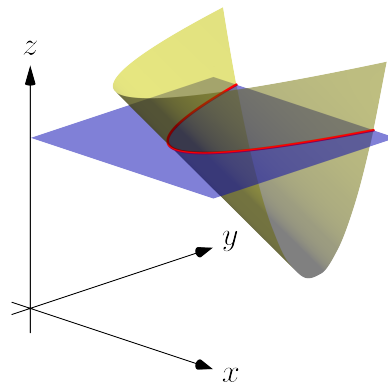
Funktionen f har et frit ekstremum.

- a) Er det frie ekstremum et minimum eller maksimum?
- b) Bestem ekstremumsstedet ved aflæsning på grafen (ikke niveaukurven). Jaja, det er svært at gøre ordenligt. Både x og y -aksen er 10 enheder lange.
- c) Bestem ekstremumsværdien ved aflæsning på grafen. JAJA JEG VED DET ER SVÆRT.

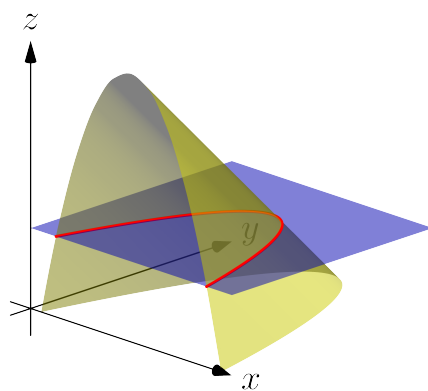
I Øvelse 4.8.5



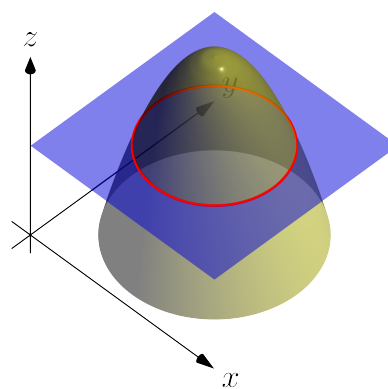
Graf 1



Graf 2



Graf 3



Graf 4

- Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 1.
- Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 2.
- Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 3.
- Afgør, hvad man kan sige om koefficienterne for graf 4.

4.9 Beviser til kvadratisk programmering

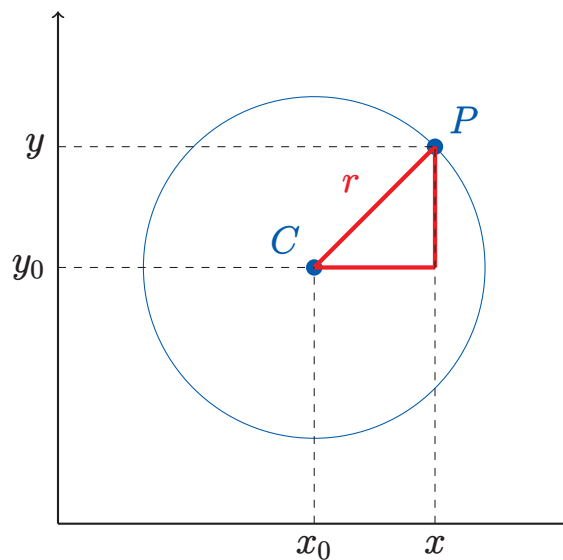
Sætning 4.6.1

En cirkel med radius r og centrum $C = (x_0, y_0)$ har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Bevis

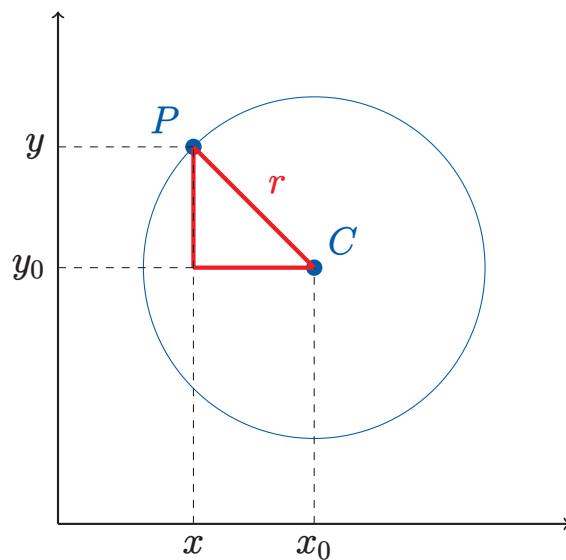
Påstanden bevises nemt vha. Pythagoras. Lad P være et punkt på cirklen:



Vi bruger Pythagoras på den røde trekanten på tegningen og får det ønskede resultat:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Men nu tænker du nok: "Benjamin: Hvad nu hvis punktet ligger et andet sted på cirklen?". Vi kunne f.eks. have:



Hvilket giver

$$(x_0 - x)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Vi kan se at der er byttet om på x og x_0 i forhold til den ligning vi gerne ville frem til. Men det er ligemeget om der står $x - x_0$ eller $x_0 - x$ i parentesene i cirkelns ligning. Det giver det samme, fordi det bliver sat i anden. Vi har hermed bevist at cirkelns ligning er bestemt ved:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Sætning 4.8.3

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$.

Hvis $a \neq 0$, $d \neq 0$ og $c = 0$, så er niveaukurven $N(t)$ en parabel for alle værdier af t . Ændres t vil parablen parallelforskydes i lodret regning. Der gælder:

- Hvis d er positiv vil en højere værdi for t forskyde parablen op.
- Hvis d er negativ vil en højere værdi for t forskyde parablen ned.
- Hvis a og d har samme fortegn er der tale om en konkav parabel, ellers er den konveks.

Bevis

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved.

$$f(x, y) = t.$$

Vi indsætter forskriften.

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = t.$$

Da $c = 0$ går cy^2 -ledet ud:

$$ax^2 + bx + dy + e = t.$$

Vi vil gerne vise at vi kan skrive det på form som en parabel. Så vi isolerer y . Vi trækker ax^2 , bx og e fra på begge sider.

$$dy = t - ax^2 - bx - e,$$

og dividerer med d :

$$y = \frac{t - ax^2 - bx - e}{d}.$$

Vi deler brøken op og omarrangerer leddene

$$y = \frac{-ax^2}{d} + \frac{-bx}{d} + \frac{t - e}{d},$$

hvorefter vi sætter x^2 og x ned bagved brøkerne.

$$y = \frac{-a}{d}x^2 + \frac{-b}{d}x + \frac{t - e}{d}$$

Vi kan se at udtrykket nu har form som en parabel, så $N(t)$ er altså en parabel. Vi kan se at det eneste led som indeholder t er konstantleddet $\frac{t-e}{d}$. Dvs. en ændring i t vil betyde en lodret parallelforskydning af parablen. Hvis d er positiv vil konstantleddet vokse når t vælges større, hvilket igen betyder at parablen forskydes op. Hvis d er negativ vil konstantleddet aftage da nævneren i brøken bliver negativ, så når brøkens tæller vokser, så vil hele brøken blive mindre. Altså vil en negativ d -værdi betyde at parablen forskydes ned når t vælges større.

Vi kan se at koefficienten til x^2 er $\frac{-a}{d}$. Hvis a og d har samme fortegn vil brøken være negativ og parablen dermed konkav. Hvis a og d har forskelligt fortegn vil brøken være positiv og parablen vil dermed være konveks.

Vi vil nu bevise en sætning som ikke er så interessant i sig selv, men som skal bruges i de efterfølgende beviser. Derfor er den kaldt en "hjælpesætning".

Sætning 4.9.1

(Hjælpesætning)

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$ og antag at $a \neq 0$ og $c \neq 0$.
Da kan f skrives på formen:

$$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m,$$

hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{d}{2c} \quad \text{og} \quad m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Bevis

Vi har funktionen

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e.$$

Vi faktorerer:

$$f(x, y) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c\left(y^2 + \frac{d}{c}y\right) + e,$$

og vi vil nu kvadratkompletterer det der står i parenteserne. Da halvdelen af $\frac{b}{a}$ er $\frac{b}{2a}$ får vi:

$$f(x, y) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c\left(\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - \left(\frac{d}{2c}\right)^2\right) + e.$$

Vi reducerer

$$f(x, y) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c\left(\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c^2}\right) + e,$$

ganger parenteserne ud

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 - c\frac{d^2}{4c^2} + e,$$

reducerer igen

$$f(x, y) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \left(y + \frac{d}{2c} \right)^2 - \frac{d^2}{4c} + e,$$

og bytter nu om på rækkefølgen:

$$f(x, y) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c \left(y + \frac{d}{2c} \right)^2 + e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Vi ser at f har formen:

$$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m,$$

hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{d}{2c} \quad \text{og} \quad m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Sætning 4.8.1

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$, og antag at a og c har samme fortegn (som ikke er nul selvfølgelig). Da har f frit ekstremum i punktet

$$C = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c} \right)$$

med ekstremumsværdi

$$m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Hvis a og c er positive er det frie ekstremum et minimum ellers er det et maksimum.

Bevis

Først omskrives $f(x, y)$ ifølge sætning 4.9.1. Vi har altså:

$$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m,$$

hvor

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{d}{2c} \quad \text{og} \quad m = e - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}.$$

Antag først at $a > 0$ og $c > 0$.

Vi vil nu undersøge, hvad der sker når vi varierer x og y . Hvad sker der med funktionsværdien? Vi bemærker at m er en konstant og derfor forbliver det samme, når x og y ændrer sig. Så det er kun de to første led, der varierer, når vi ændrer x og y . Vi ved at $(x - x_0)^2$ og $(y - y_0)^2$ ikke kan blive mindre end nul, da de har form som noget i anden. Vi har altså:

$$f(x, y) = \underbrace{a}_{+} \cdot \underbrace{(x - x_0)^2}_{+ \text{ eller } 0} + \underbrace{c}_{+} \cdot \underbrace{(y - y_0)^2}_{+ \text{ eller } 0} + \underbrace{m}_{?},$$

hvilket må betyde at:

$$f(x, y) = \underbrace{a(x - x_0)^2}_{+ \text{ eller } 0} + \underbrace{c(y - y_0)^2}_{+ \text{ eller } 0} + \underbrace{m}_{?}.$$

Vi kan se at de to første led altid er positive eller nul, så vi får den mindste funktionsværdi når de begge to er nul (m er en konstant, så den vil være det samme uanset hvad x og y er). De to første led er nul når $x = x_0$ og $y = y_0$. Den tilhørende funktionsværdi bliver:

$$f(x_0, y_0) = a(x_0 - x_0)^2 + c(y_0 - y_0)^2 + m = 0 + 0 + m = m$$

Altså har funktionen minimum i (x_0, y_0) og vi ser samtidigt, at minimumsværdien er m .

Antag nu at $a < 0$ og $c < 0$. Se næste øvelse.

Øvelse 4.9.1

- a) Gør ovenstående bevis færdigt. Det fungerer tilsvarende som når $a > 0$ og $c > 0$.

Sætning 4.8.2

Lad $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e$ og antag at f har frit ekstremum m .

Hvis $a > 0$, $c > 0$ og $t > m$ så er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en større ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$ så er niveaukurven $N(t)$ en ellipse. Vælges en højere værdi for t fås en mindre ellipse. Alle niveaukurverne har samme centrum.

Hvis $a = c$ i en af de to ovennævnte situationer, så er niveaukurverne tilmed cirkler.

Bevis

Antag først, at $a > 0$, $c > 0$ og $t > m$:

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved.

$$f(x, y) = t.$$

Forskriften for f kan ifølge sætning 4.9.1 skrives som:

$$a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m = t.$$

Vi trækker m fra på begge sider

$$a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 = t - m.$$

Vi deler nu med $t - m$. Det kan vi gøre, fordi vi ved, at $t > m$, og dermed kan $t - m$ ikke være nul.

$$\frac{a(x - x_0)^2}{t - m} + \frac{c(y - y_0)^2}{t - m} = 1.$$

Vi forkorter den første brøk med a og den anden med c . Det kan vi gøre, fordi ved ved at a og c ikke er nul (vi har antaget at de er større end nul):

$$\frac{(x - x_0)^2}{\frac{t-m}{a}} + \frac{(y - y_0)^2}{\frac{t-m}{c}} = 1.$$

Da $t > m$, er $t - m > 0$ og da også $a > 0$ og $c > 0$, er brøkerne $\frac{t-m}{a}$ og $\frac{t-m}{c}$ også positive. De kan derfor skrives som kvadratrødder i anden:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{t-m}{a}}\right)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{t-m}{c}}\right)^2} = 1.$$

Og der har vi den. Ellipsens ligning. Niveaukurven $N(t)$ er altså en ellipse med centrum i $(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c}\right) = C$, vandret halvakse $\sqrt{\frac{t-m}{a}}$ og lodret halvakse $\sqrt{\frac{t-m}{c}}$.

Når der vælges en højere værdi af t , bliver $t - m$ større, og dermed bliver halvakserne $\sqrt{\frac{t-m}{a}}$ og $\sqrt{\frac{t-m}{c}}$ også større. Ud fra udtrykkene for halvaksene ses det også, at halvakserne bliver ens, hvis $a = c$ og vi har allerede set (se øvelse 4.7.6) at en ellipse med ens halvakser er en cirkel.

Antag nu at $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$: Se næste øvelse.

Øvelse 4.9.2

- a) Gør ovenstående bevis færdigt. Det fungerer tilsvarende som når $a > 0$ og $c > 0$.

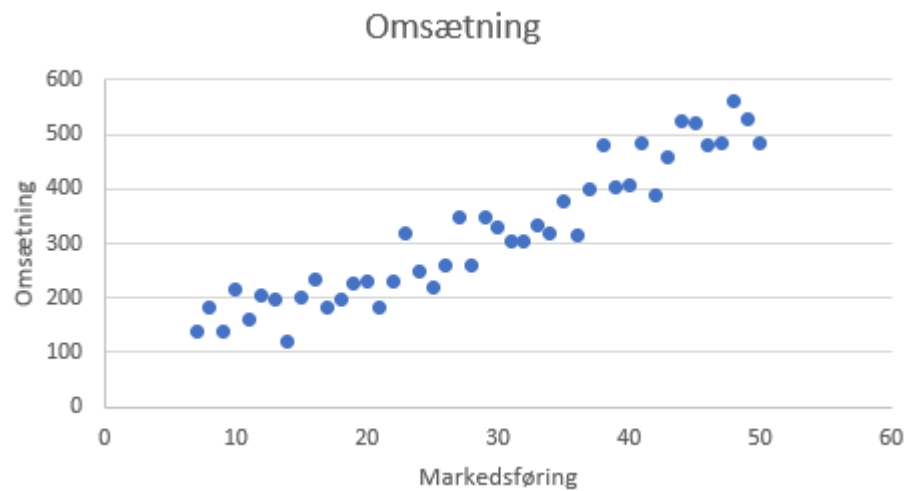
Kapitel 5

Regressionsanalyse

I dette kapitel skal vi først blive klogere på teorien bag lineær regression. Derefter skal vi se på multipel regression som kan bruges når vores y -værdier afhænger af mere end én variabel. Efter dette vil vi se på ”modelkontrol”, som går ud på at undersøge validiteten af ens model. Til sidst skal vi lære at lave lineær regression uden computer.

5.1 Lineære modeller

Lad os sige at vi vil bestemme sammenhængen mellem penge brugt på markedsføring og omsætning for virksomheder. Vi spørger nogle virksomheder og laver et xy-plot:



Det ser ud til at punkterne følger en lineær funktion, men med tilfældige afvigelser (op og ned) fra linjen:



I afsnittet om lineære regression (mat-b) ignorerede vi afvigelserne, og beskæftiget os kun med den lineære funktion. Nu skal vi se på en model, som også beskriver afvigelserne. Den ser således ud:

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

Bogstaverne α , β og ε , er de græske bogstaver alfa, beta og epsilon. Vi kan se at y har form som en lineær funktion bortset fra ε . Størrelsen ε er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 0. Denne stokastiske variabel giver afvigelserne fra linjen og derfor kaldes den også *fejleddet*.

Estimeret lineær model

Når vi laver lineær regression, så antager vi først at data kan beskrives med den lineære model

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

hvorefter vi estimere α og β . Estimerne for α og β kalder vi for a og b , og ud fra dem kan vi opskrive den *estimerede* model:

$$y = ax + b + \varepsilon$$

Det er vigtigt at forstå, at vi egentligt er interesseret i α og β , men at det er umuligt at bestemme dem eksakt, fordi vores data er "forurenede" med de tilfældige ε 'er (afvigelser). Dvs. laver vi en ny undersøgelse af sammenhæng mellem markedsføringsbudget og omsætning, hvor vi spørger andre virksomheder, vil sandsynligvis finde en anden model, fordi de tilfældige afvigelser ε falder anderledes ud. Selvom vi ikke kan sige præcis, hvad α og β er, kan vi dog bestemme konfidensintervaller for dem, hvilket vi kommer til at gøre i næste afsnit. Når vi skal bruge den estimerede model i praksis, dropper vi ε og skriver blot:

$$y = ax + b$$

... og så er vi tilbage til den gamle regressionsmodel fra mat-b. Grunden til at vi dropper ε er, at det er en stokastisk variabel som har middelværdi 0. Dvs. at vores bedste bud på dens værdi (for et konkret

punkt på grafen) er 0. Vil vil i nogle sammenhænge skrive modellen som

$$\hat{y} = ax + b$$

Her skriver vi $\hat{y}$, for at understrege, at der er tale om vores bedste bud på y , og ikke den virkelige y -værdi (som svinger tilfældigt omkring linjen).

5.2 Regression i Analysis Toolpak

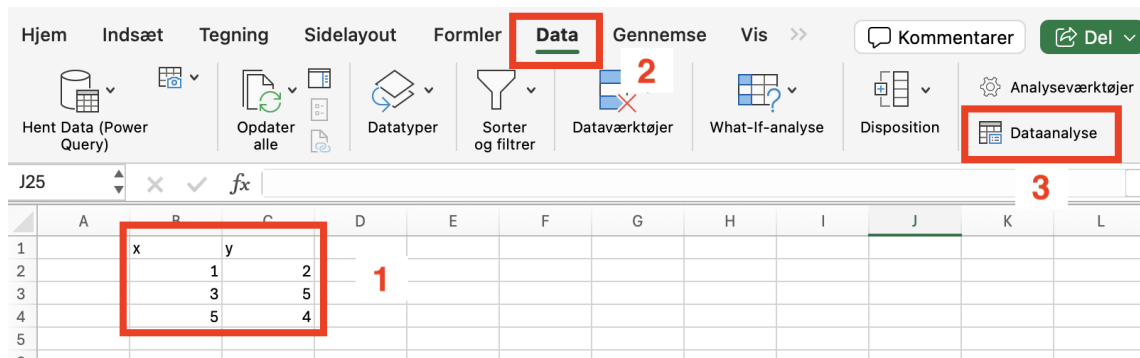
Analysis Toolpak er en udvidelse til Excel. Man kan bruge den til at lave almindelig lineær regression, men man kan få flere informationer, end med den metode vi kender fra Mat-B.

Start med at installer Analysis Toolpak, hvis du ikke allerede har den. Du kan se hvordan her: <https://support.office.com/en-us/article/load-the-analysis-toolpak-in-excel-6a63e598-cd6d-42e3-9317-6b40ba1a66b4>.

Vi vil tage udgangspunkt i datasættet:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi skriver tabellen ind i Excel og finder "Dataanalyse"(Under båndet "Data"):

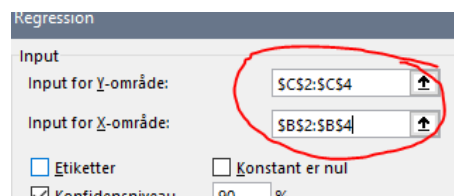


Nu kommer der en dialogboks frem og alt efter hvilke bokse vi tjekker, kan vi få Analysis Toolpak til at bestemme forskellige relevante størrelser. Vi skal se på hvordan man bestemmer nogle af disse størrelser, men også hvad de betyder. Vi vil kigge på følgende

- Forskrift for regressionslinjen og R^2
- Residualer og residualplot
- Konfidensintervaller

Forskrift for regressionslinjen

I dialogboksen vælger vi "Regression" og i den efterfølgende dialogbox vælger vi vores x og y-værdier:



Vi finder nu tabellen:

	Koefficient	standardfe	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	2,166667	1,972027	1,098701	0,470082	-22,8903	27,22364	-22,8903	27,22364
X-variabel	0,5	0,57735	0,866025	0,545629	-6,83593	7,835931	-6,83593	7,835931

Vi aflæser resultatet i kolonnen "Koefficienter". Det øverste tal ("Skæring") er b og det nederste ("X-variabel") er a . I alt får vi

$$y = 0,5x + 2,17.$$

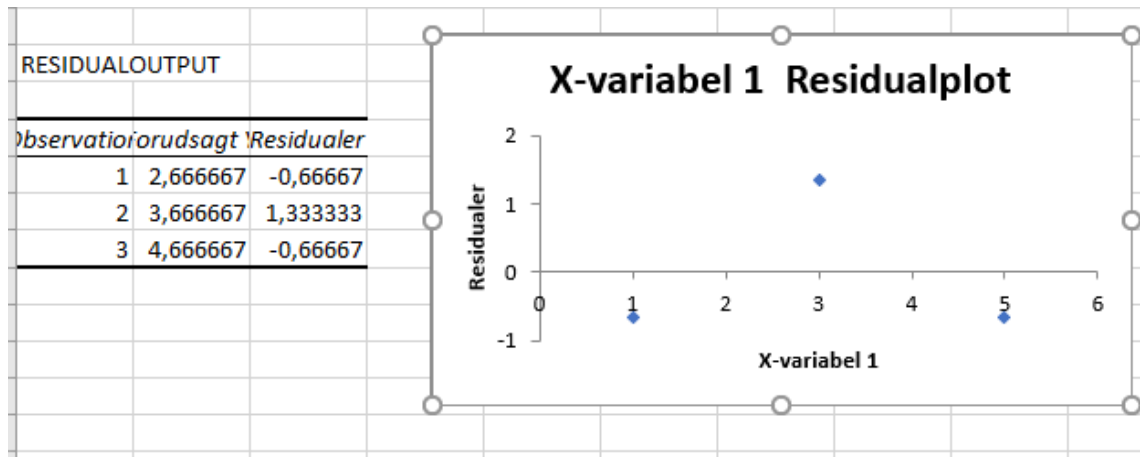
Denne forskrift er præcis magen til den vi ville finde hvis vi brugte den sædvanlige metode til at lave regression. Vi finder også vores R^2 :

Regressionsstatistik	
Multipel F	0,654654
R-kvadrat	0,428571
Justeret R	-0,14286
Standardf	1,632993
Observati	3

Også her er der ikke noget nyt. Det er bare den goe gamle R^2 vi har fundet. Altså $R^2 = 0,43$.

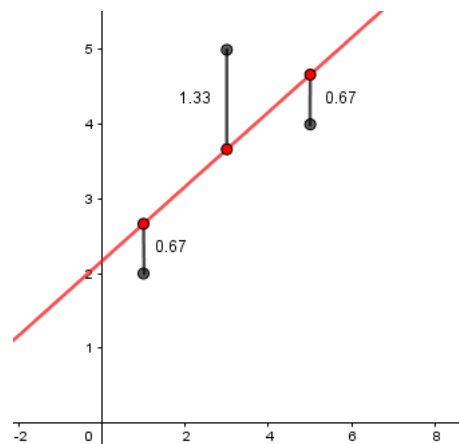
Residualer og residualplot

Residualerne viser afvigelsen fra modellen til de faktiske data. Vi får følgende når vi sætter flueben i "residualer" og "residualplot".



I tabellen til venstre ser vi residualerne og til højre er residualerne illustreret med et *residualplot*. Læg mærke til at vi har x-værdierne fra data på x-aksen og residualerne ud ad y-aksen.

Betydningen af residualerne ses her:



De sorte punkter er vores data og de lodrette streger viser forskellen mellem model og data. Sammenligner vi tallene på tegningen med dem i tabellen ser vi at to af dem i tabellen har et minus foran. Det er fordi de ligger under grafen og derfor er der en negativ afvigelse.

Vi skal se nærmere på residualerne i afsnit 5.4 om modelkontrol.

Konfidensintervaller

Vi skal nu se hvordan man bestemmer et konfidensinterval for α i regressionsmodellen

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

Helt konkret vil vi bestemme et 90%-konfidensinterval for α . Vi er desværre nødt til at starte forfra, da vi skal bruge andre indstillinger.

Vi finder grænserne for vores konfidensinterval her:

	Koefficient	standardfe	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 90,0%	Øvre 90,0%
Skæring	2,166667	1,972027	1,098701	0,470082	-22,8903	27,22364	-10,2842	14,61755
X-variabel	0,5	0,57735	0,866025	0,545629	-6,83593	7,835931	-3,14525	4,145246

Vi får vores 90%-konfidensinterval til at være $[-3,14; 4,15]$. Men hvad har vi fundet? Jo, vi har fundet ud af, at α med 90% sandsynlighed ligger i intervallet $[-3,14; 4,15]$. Som vi lærte i afsnit 5.1, er det jo ikke

den rigtige hældning α vi finder, når vi laver lineær regression, men bare vores bedste bud a .

Vi bemærker at vores konfidensinterval indeholder 0. Det betyder, at selv om vi har bestemt a til at være positiv, og vi dermed har en voksende funktion, så kan vi ikke være sikre på, det forholder sig sådan i virkeligheden. For hvis $\alpha = 0$, så er y -værdierne slet ikke afhængige af x -værdierne, og så er der jo ingen sammenhæng mellem x og y . Så når vi har et konfidensinterval som indeholder nul, skal vi være forsigtige med at konkludere noget ud fra modellen.

I eksamensopgaverne på hhx optræder tit formuleringen ”konfidensinterval for a ”. Med det menes konfidensinterval for α .

Øvelse 5.2.1

Betragt data:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4
6	7

Bestem følgende ved hjælp af Analysis Toolpak

- a) En lineær model for data
- b) R^2
- c) Residualer og residualplot
- d) Et 99%-konfidensinterval for hældningen i den lineære model

5.3 Multipel lineær regression

Multipel lineær regression er lineær regression, hvor vi har mere end én forklarende variabel. Dvs. hvor y -værdierne afhænger af mere end én variabel.

Vi vil tage udgangspunkt i et fiktivt dataset, som viser en klasses årskarakterer (gennemsnit af alle fag):

Lektier	Fravær	Skærm	Karaktersnit
18	0,02	11	8,5
10	0,08	15	4,6
5	0,04	1	3,2
27	0,06	14	10,7
30	0,05	7	11,7
25	0,03	4	11,1

I skemaet ses også hvor lang tid eleven bruger på lektier om ugen, fraværsprocenten (som decimaltal) og hvor lang tid eleven ellers bruger på computerspil/sociale medier (skærm) om ugen. Vi må formode at tid brugt på lektier og fravær har betydning for karaktererne, men hvad med tiden brugt på computerspil/sociale medier? Vi kunne lave tre forskellige regressioner og se hvilken betydning de har hver for sig, men vi kan faktisk gøre noget endnu bedre. Med multipel regression kan vi lave en samlet model som giver den forventede karakter på baggrund af de tre variable. Med udgangspunkt i en almindelig lineær model

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

tilføjer vi bare et ekstra led for hver variable, så modellen kommer til at se således ud:

$$y = \alpha_1 x_{\text{lektier}} + \alpha_2 x_{\text{fravær}} + \alpha_3 x_{\text{skærm}} + \beta + \varepsilon.$$

Der er dog tradition for at skrive den type modeller på en lidt anden måde, så det vil vi også gøre. Vi vil skrive:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

hvor Y er karaktersnit, X_1 er lektier, X_2 fravær og X_3 skærm. Vi kalder X_i 'erne for de *forklarende variable*. Bemærk at vi med denne skriveform skriver konstantleddet først (og at det nu hedder β_0 i stedet for β).

Forskrift for modellen

Det er nemt at finde den multiple lineære model med Analysis Toolpak. Vi gør det på tilsvarende måde som da vi lavede simpel lineær regression tidligere (Dataanalyse → regression). Den eneste forskel er at vi nu skal ramme alle x'erne ind, når vi vælger vores x-værdier:

Lektier	Fravær	Skærm	Karaktersnit
18	0,02	11	8,5
10	0,08	15	4,6
5	0,04	1	3,2
27	0,06	14	10,7
30	0,05	7	11,7

Regression

\$E\$5:\$G\$16

Vi får nu følgende output:

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9962061	0,4393869	4,5431622	0,0002879	1,0691807	2,9232314	1,0691807	2,9232314
X-variabel 1	0,3526365	0,015836	22,267957	5,137E-14	0,3192253	0,3860476	0,3192253	0,3860476
X-variabel 2	-13,93671	3,6138141	-3,856509	0,0012657	-21,56119	-6,312225	-21,56119	-6,312225
X-variabel 3	-0,001552	0,0309452	-0,05014	0,9605954	-0,06684	0,0637371	-0,06684	0,0637371

Vi aflæser nu koefficienterne til vores model i søjlen "Koefficienter" og får

$$Y = 2 + 0,352X_1 - 13,9X_2 - 0,00155X_3 + \varepsilon$$

Nemt!

Konfidensintervaller og korregeret model

I forbindelse med simpel lineær regression har vi argumenteret for at hvis konfidensintervallet for hældningen indeholdte nul, så betød det at vi ikke kunne være sikre på, at der var en sammenhæng mellem x og y . Dette gælder også for multipel regression. Vi ser nu på tabellen igen:

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9962061	0,4393869	4,5431622	0,0002879	1,0691807	2,9232314	1,0691807	2,9232314
X-variabel 1	0,3526365	0,015836	22,267957	5,137E-14	0,3192253	0,3860476	0,3192253	0,3860476
X-variabel 2	-13,93671	3,6138141	-3,856509	0,0012657	-21,56119	-6,312225	-21,56119	-6,312225
X-variabel 3	-0,001552	0,0309452	-0,05014	0,9605954	-0,06684	0,0637371	-0,06684	0,0637371

Vi kan se at konfidensintervallet for "X-variabel 3" (skærm) indeholder nul. Det betyder at vi ikke kan være sikker på at skærmtiden har nogen betydning. En hurtigere (og bedre) måde vi kan afgøre det samme på, er at kigge på kolonnen "P-værdi".

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9962061	0,4393869	4,5431622	0,0002879	1,0691807	2,9232314	1,0691807	2,9232314
X-variabel 1	0,3526365	0,015836	22,267957	5,137E-14	0,3192253	0,3860476	0,3192253	0,3860476
X-variabel 2	-13,93671	3,6138141	-3,856509	0,0012657	-21,56119	-6,312225	-21,56119	-6,312225
X-variabel 3	-0,001552	0,0309452	-0,05014	0,9605954	-0,06684	0,0637371	-0,06684	0,0637371

Hvis p-værdien er stor, kan vi ikke være sikker på at variabelen har betydning. Vi kan se at P-værdien er på hele 96%, og da vi ikke har noget godt argument for at skærmtiden har betydning for karakteren, vælger vi at opstille modellen uden skærmtiden som variabel. Vi starter nu forfra og laver en ny model hvor vi kun bruger de to søjler med lektier og fravær. Det giver os følgende:

	Koefficienter	Standardfejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,9869801	0,3877897	5,1238601	7,106E-05	1,1722642	2,8016961	1,1722642	2,8016961
X-variabel 1	0,3524599	0,0150058	23,488219	5,905E-15	0,3209339	0,383986	0,3209339	0,383986
X-variabel 2	-13,959336	3,4847557	-4,0058292	0,000829	-21,280536	-6,6381359	-21,280536	-6,6381359

Vi kan se at de nu har alle variable lave p-værdier (under 5%), så vi er nået frem til vores korrigerede model. Vi aflæser koefficienterne i tabellen og opskriver modellen:

$$Y = 2 + 0,352X_1 - 14X_2 + \varepsilon$$

hvor Y er den forventede karakter, X_1 er tiden brugt på lektier og X_2 er fraværet.

Er der flere variable som har en p-værdi på over 5%, fjerner man først den variabel med den højeste p-værdi. Derefter laver man en ny model, og hvis der i den nye model stadig er variable med en p-værdi på over 5%, så fjerner man den variabel med den højeste p-værdi, laver en ny model, og sådan bliver man ved indtil alle værdier er under 5%.

For mere info om, hvornår man bør opstille en korrigeret model i stedet for den fulde model se afsnit 5.5.

Forklaring af p-værdi

Vi har tidligere set på p-værdier. Det var i forbindelse med χ^2 -test. I forbindelse med regression er der også tale om hypotesetest, men det er ikke en χ^2 -test som vi kender. Det er derimod en *F-test for individuel signifikans*. Det betyder at vi for hver parameter *beta* tester hypotesen:

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0$$

Det betyder altså, at vi tester hver β_i , og ser om der en mulighed for at den er nul. Det fungerer ligesom med χ^2 -test. Er p-værdien mindre en signifikansniveauet forkaster vi H_0 . Forkaster vi **ikke**, svarer betyder det at det pågældende β_i godt kan være nul (og dermed også omkring nul). Det betyder at det er usikkert, hvilken betydning den tilhørende variabel har, og derfor kan vi sortere den fra.

Vi vil ikke gå i mere i detaljer med matematikken bag en F-test, men blot stole på de p-værdier som Excel giver.

Justeret determinationskoefficient

Ved multipel regression bliver determinationskoefficienten R^2 større jo flere variable man tager med - også selvom det er variable der ikke er relevante. Derfor benytter man ofte den *justerede determinationskoefficient* i stedet. Den justerede R^2 har den egenskab, at den falder når man medtager irrelevante variable. Vi vil ikke gå mere i detaljer med at hvad den helt præcist udtrykker, men når den er tæt på 1 er det udtryk for at modellen passer godt med data (ligesom med den almindelig R^2). Vi får den justerede R^2 foræret når vi laver modellen:

<i>Regressionsstatistik</i>	
Multipel R	0,9878464
R-kvadreret	0,9758404
Justeret R-kvadreret	0,973156
Standardfejl	0,6371993
Observationer	21

Vi kan se at den justerede R^2 for vores endelige model er 0,97.

5.4 Modelkontrol

Inden vi nåede til dette kapitel om regressionsanalyse, var lineær regression noget med at finde den linje, der bedst passede med data. Det var Excel (eller GeoGebra), som klarede den del for os, og vi tænke ikke mere over det. Problemet med denne tilgang er, at vi risikerer, at Excel/GeoGebra giver os en model, der ikke er optimal, og at vi får ugyldige konfidensintervaller, p-værdier osv. Skal vi være sikker på, at modellen er optimal, og at konfidensintervaller, p-værdier osv. er korrekte, skal de teoretiske forudsætninger være opfyldt. Vi skal nu se nærmere på, hvordan man tjekker dette. Vi kalder det *modelkontrol*, idet vi kontrollerer forudsætningerne for modellen.

Simpel (almindelig) lineær regression

Ved almindelig lineær regression antager vi at der er følgende sammenhæng mellem x og y

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

Vi antager at fejleddet ε følger den samme normalfordeling gennem hele ens data og, at de forskellige fejl ikke er afhænge af hinanden. I praksis undersøger vi fejleddet ved at betragte residualerne. Det er fordi det jo netop er fejleddet der giver anledning til residualerne - hvis der ikke var fejl, så ville alle punkterne ligge på linjen. En undersøgelse af residualerne kaldes også en *residualanalyse*. Der skal gælde:

1. Residualerne skal have en middelværdi på 0.
2. Residualerne skal være normalfordelte.
3. Residualerne skal have en konstant varians.
4. Residualerne skal være uafhængige.

Vi vil nu se nærmere på de enkelte krav

Residualerne skal have et middelværdi på 0

Dette kan nemt undersøges ved at tage gennemsnittet af residualerne. Det burde være automatisk opfyldt, når man bruger mindste kvadraters metode (hvilket både Excel og GeoGebra gør).

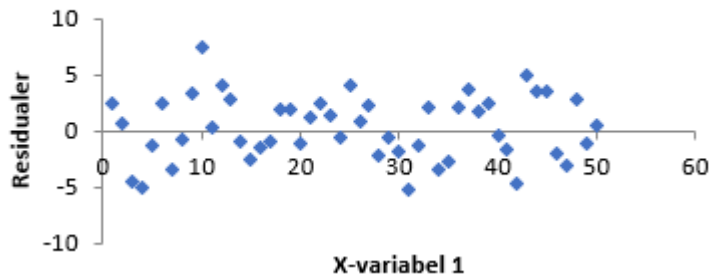
Residualerne skal være normalfordelte

Dette undersøges ved at lave et histogram med residualerne som observationer, og teste om de ser normalfordelte ud (har histogrammet klokkeform som en normalfordeling?). Man kan også lave et normalplot i Word-mat ([se afsnit om normalfordelte observationssæt](#)).

Residualerne skal have en konstant varians og være uafhængige

Disse to krav vil vi tjekke med residualplot. Et residualplot skal se nogenlunde således ud:

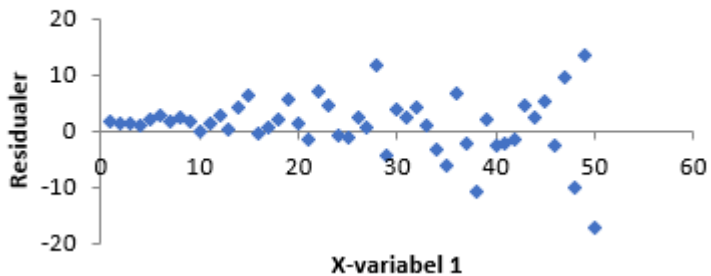
X-variabel 1 Residualplot



Vi ser at residualerne ligger tilfældigt fordelt omkring 0.

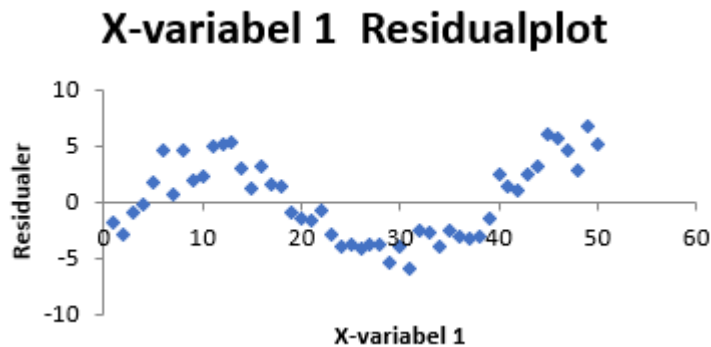
Her er et residualplot som ikke opfylder kravet om konstant varians.

X-variabel 1 Residualplot



Vi kan se at variansen starter med at være lille og derefter vokser.

Her er et residualplot som ikke opfylder kravet om uafhængighed:



Vi kan se at der er en tendens til at de enkelte residualer ligger tæt på de omkringliggende residualer. Altså hvis f.eks. et residual er højt er der en tendens til at det efterfølgende residual også er højt. Afhængige residualer ser man ofte i forbindelse med tidsserier - dvs. regressionsmodeller hvor x-værdierne er tid. Hvis f.eks. en aktiekurs er meget høj, så er der også en tendens til at aktiekursen dagen efter også er meget høj. Men afhængige residualer kan også skyldes at modellen har den forkerte form. Det kunne være at der slet ikke er tale om en lineær sammenhæng, men at data i virkeligheden var bedre beskrevet med en eksponentiel funktion f.eks.

Multipel lineær regression

De fire krav til residualerne skal også være opfyldt ved multipel regression, men måden man tjekker dem på kan være lidt anderledes, og der er også et ekstra krav. Alt i alt skal vi tjekke:

1. Residualerne skal have en middelværdi på 0.
2. Residualerne skal være normalfordelte.
3. Residualerne skal have en konstant varians.
4. Residualerne skal være uafhængige.

5. Der må ikke være nogen perfekt lineær korrelation mellem de forklarende variable.

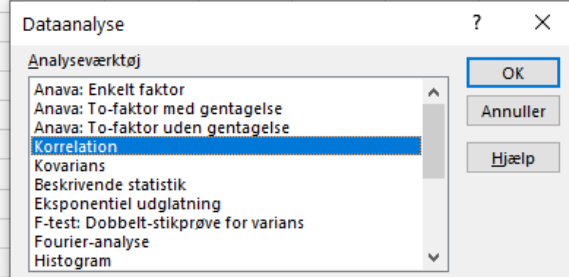
Krav 1-4

De to første krav tjekkes på samme måde som ved almindelig lineær regression. Konstant varians tjekkes ved at lave et xy-plot med residualerne som funktion af y-værdierne (de y-værdier modellen giver - ikke dem fra datasættet). Plottet inspiceres på samme måde som ved simpel regression. Uafhængighed er lidt tricky, og eftersom det mest er noget man kan have problemer med i forbindelse med tidsserier, vil vi kun undersøge for uafhængighed, hvis en af de forklarende variable er tid, eller hvis vi ved at data er indsamlet i en bestemt rækkefølge. I så fald kan man lave et xy-plot med tiden/rækkefølgen som x-værdier og residualerne som y-værdier, og se om der er et mønster.

Korrelation mellem de forklarende variable

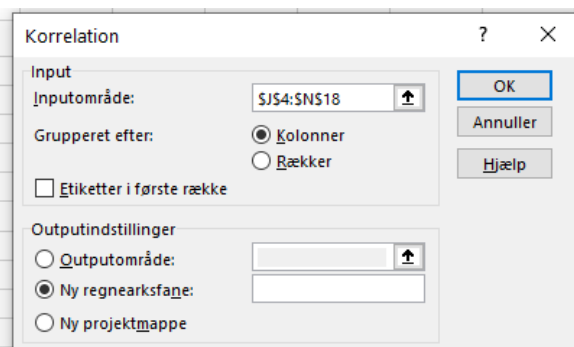
Det sidste krav betyder at de forklarende variable ikke må afhænge lineært af hinanden. Det kan man tjekke ved hjælp af en *korrelationsmatrix*. Den laves i Analysis Toolpak på følgende måde. Lad os sige at vi 5 forklarende variable som vist nedenunder. Vi vælger "Dataanalyse" og så "Korrelation":

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
9,511601	18,15197	59,55502	23,68819	5,579551
10,02877	17,65388	60,15521	7,6676	13,26808
7,494405	18,28659	58,67567	18,04086	13,17899
10,40121	20,79807	60,283	15,48323	21,60321
6,315634	20,40168	58,08284	27,27822	11,91678
9,362619	18,94857	59,80845	20,38057	20,19421
8,907261	21,63235	59,4329	33,65405	13,20955
9,722397	20,54595	59,82296	14,78023	18,03321
11,3745	17,29377	60,87899	6,761259	15,55082
11,95415	20,81971	61,13512	-6,41246	14,3566
7,415084	15,99586	58,81582	3,375045	10,15099
11,46746	20,81076	60,93664	34,28412	17,56603
9,62591	15,48968	59,63477	1,564799	20,22961
5,246721	16,10323	57,69016	30,05967	16,72947
11,64884	19,35326	60,90938	-4,42667	12,07228



I "Inputområde" rammer vi vores data ind og trykker "OK":

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
9,511601	18,15197	59,55502	23,68819	5,579551
10,02877	17,65388	60,15521	7,6676	13,26808
7,494405	18,28659	58,67567	18,04086	13,17899
10,40121	20,79807	60,283	15,48323	21,60321
6,315634	20,40168	58,08284	27,27822	11,91678
9,362619	18,94857	59,80845	20,38057	20,19421
8,907261	21,63235	59,4329	33,65405	13,20955
9,722397	20,54595	59,82296	14,78023	18,03321
11,3745	17,29377	60,87899	6,761259	15,55082
11,95415	20,81971	61,13512	-6,41246	14,3566
7,415084	15,99586	58,81582	3,375045	10,15099
11,46746	20,81076	60,93664	34,28412	17,56603
9,62591	15,48968	59,63477	1,564799	20,22961
5,246721	16,10323	57,69016	30,05967	16,72947
11,64884	19,35326	60,90938	-4,42667	12,07228



Det giver os følgende tabel:

	Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Kolonne 5
Kolonne 1	1				
Kolonne 2	0,356544	1			
Kolonne 3	0,993665	0,355158	1		
Kolonne 4	-0,46573	0,29036	-0,46206	1	
Kolonne 5	0,174	0,094089	0,198211	0,015501	1

Vi kigger nu efter tal som er tæt på 1 eller -1. Vi bemærker at der står 0,99 ud fra kolonne 1 under kolonne 3. Det betyder at hvis man laver lineær regression med x_1 som x-værdier og x_3 som y-værdier ville man få en korrelationskoefficient på $r = 0,99$. Vi husker at korrelationskoefficienten r er det samme som kvadratroden af R^2 (men med minus hvis udviklingen er aftagende). Så når $r = 0,99$ betyder det der er en sammenhæng mellem x_1 og x_3 og derfor må man overveje at fjerne en af de to variable fra modellen. Million-dollar-spørgsmålet er så hvor stor/lille r må være? Her må jeg skuffe med et ikke-svar. Kravet hedder ingen "perfekt" lineær korrelation, og det fortolker vi her som at være meget tæt på 1 (eller -1), men der er ingen magisk grænse. Jo tættere på 1 (eller -1) jo større problem har vi.

Øvelse 5.4.1

Tag udgangspunkt i datasættet [her](#).

- Lav en korrelationsmatrix for de 3 forklarende variable i datasættet med karaktererne
- Er der korrelation mellem nogle af de forklarende variable?

Outliers

Der kan forekomme observationer som afviger meget for modellen. Dem kan man spotte når man kigger på residualerne. Der er ikke nogen fast

regel for hvornår man fjerner outliers. Det kan gøres efter forskellige principper. Jeg vil anbefale at man bruger sin fornuft, og fjerner observationer som vurderes som fejl. Måler man f.eks. temperaturen af vand i en gryde under opvarmning, og en af temperaturene er registreret som 478°C , så er det nok fordi at der er skrevet forkert, og derfor bør observationen fjernes fra data.

Determinationskoefficienten (justereret determinationskoefficient)

I forbindelse med modelkontrol er det også en god ide at kommentere på R^2 . Er R^2 lav betyder det er generelt er stor forskel på det modellen siger og de faktiske data, men det behøver ikke at betyde at modellen er dårlig. Hvis der er tale om data med et stort tilfældigt element, så kan man ikke undgå at få en lav R^2 uanset hvilken model man laver. Modellen kan stadig være det bedst mulige måde at beskrive data på. Tilsvarende kan man godt have en høj R^2 , men en dårlig model (hvis den ikke opfylder de andre krav nævnt i dette afsnit).

5.5 Guide til fancy lineær regression

Vi slutter af med en oversigt over hvordan man laver lineær regression på et højere niveau end vi kender fra B-niveau. Det bemærkes at det er en lidt omstændelig proces, så i forbindelse med skriftlige prøver og eksamen anbefaler jeg, at man dropper modelkontrollen (eller i hvert fald begrænser den) medmindre opgaven ligger op til at man laver modelkontrol.

Simpel lineær regression

1. Lav regression med Analysis Toolpak. Sørg for at du har sat flueben ved residualer og residualplot.
2. Lav modelkontrol. Dvs. undersøg om residualerne er normalfordelte med middelværdi nul, har konstant varians og er uafhængige. I praksis vil modelkontrollen ofte give et lidt mudret billede, da det tit ser ud til at kravene ikke helt er opfyldt. Det betyder dog ikke at modellen ikke kan bruges, men det gør den mindre pålidelig - så du skal tage forbehold. Husk også at overveje om du vil fjerne outliers (hvorefter du så må lave en ny model).
3. Opskriv den endelige model, skriv hvad de forskellige variable står for, og kommenter på modellens kvalitet ud fra din modelkontrol (inkl. R^2).

Multipel lineær regression

1. Lav først en regression med alle variable med Analysis Toolpak.
2. Du kan nu vælge om du opstille den fulde model eller en korrigeret model. Du skal altså beslutte om du vil vælge ikke signifikante variable fra. Der er ikke nogen fast regel der siger om du skal gøre det eller ej. Vi husker at en høj p-værdi ikke betyder, at variabelen er irrelevant - det betyder, at vi ikke kan være sikre på den er relevant ud fra de data vi har. Måske har vi på forhånd en formodning om at den er relevant? Summa summarum, man skal tænke sig om inden man fjerner variable fra modellen. Så tænker I nu... åhhh hvad gør jeg til eksamen? Ja vi må håbe det fremgår af opgaven om det forventes at I fjerner dem. Hvis ikke, kan I evt. opstille både en fuld og en reduceret model. I den virkelige verden vil man typisk bruge en mere raffineret metode til varia-

belselektion end den som er præsenteret her. Hvis du beslutter, at du vil fjerne ikke-signifikante variable, så se om der er nogle variable som har en p-værdi på over 5% (eller hvad du nu har valgt som signifikansniveau). Hvis ja, så fjern den variabel som har den største p-værdi og lav en ny model. Dette gentager du, indtil alle p-værdierne er under signifikansniveauet. Overvej også om du vil fjerne outliers.

3. Lav modelkontrol som ved simpel lineær regression. Men her skal du huske også at tjekke for korrelation mellem de forklarende variable med en korrelationsmatrix. Hvis der er korrelation, så overvej at fjerne variable. Hvis en variabel både er korreleret og ikke-signifikant, er der endnu mere grund til at fjerne den.
4. Opskriv den endelige model, skriv hvad de forskellige variable står for, og kommenter på modellens kvalitet ud fra din modelkontrol (inkl. justeret R^2).

Øvelse 5.5.1

Du skal nu tage udgangspunkt i det samme datasæt som jeg har brugt som eksempel igennem sidste afsnit. Det er vedlagt [her](#)

- a) Gennemføre grundig multipel regression efter opskriften ovenover.

5.6 Ekstrema for funktioner af to variable

I dette afsnit skal vi supplere vores differentialregningsværktøjskasse (sejt ord), så vi er rustet til de udfordringer vi møder i næste afsnit. Afsnittet har i sig selv ikke noget med lineær regression at gøre, men det gør det jo kun mere interessant.

Partielle afledede

Ligesom man kan differentiere funktioner af én variable, kan man også differentiere funktioner af to variable. Det gør man ved at betragte den ene variabel som en konstant. På den måde får man en funktion af én variabel, som man kan differentiere på sædvanlig vis. Det er nemmest at forklare ved et eksempel.

Eksempel 5.6.1

Lad $f(x, y) = y^2 + x$. Vi vil nu finde det som kaldes den *partielle afledede med hensyn til y* og betegnes $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$. Det gør vi ved at opfatte x som en konstant, og differentiere f som funktion af y . Vi ved at y^2 bliver $2y$ når man differentierer, og x skulle betragtes som en konstant, så den bliver til 0. Altså får vi

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y + 0 = 2y$$

Vi kan også finde den *partielle afledede med hensyn til x* . Det gøres selvfølgelig ved at holde y konstant, og differentiere funktionen som en funktion af x . Hvis y er en konstant er y^2 også en konstant, og den bliver derfor 0 når vi differentiere. Når vi differentiere x får vi 1 og altså har vi:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + 1 = 1.$$

Øvelse 5.6.1

Bestem både $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ for følgende funktioner

a) $f(x, y) = x - y + 2$

b) $f(x, y) = x^3 y^2$

Det er ikke altid at funktions variable hedder x og y .

Eksempel 5.6.2

Lad $f(v, w) = 2w^2 - \ln(v) + 0$. Vi kan se at f en funktion af v og w . Vi finder:

$$\frac{\partial}{\partial v} f(v, w) = 0 - \frac{1}{v} - 0 = -\frac{1}{v}$$

og

$$\frac{\partial}{\partial w} f(v, w) = 2 \cdot 2w - 0 + 0 = 4w$$

Øvelse 5.6.2

Bestem:

a) $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b)$ og $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b)$ for $f(a, b) = 2a + ab^2 - 4$

b) $\frac{\partial}{\partial p} f(p, q)$ og $\frac{\partial}{\partial q} f(p, q)$ for $f(p, q) = e^q + b^2 - 3p$

Stationære punkter

Vi husker følgende sætning for funktioner af én variabel:

Sætning

(Fra Mat-B)

Lad f være en differentialbel funktion som er defineret på et åbent interval I .

Hvis f har et ekstremum i $x_0 \in I$, så er $f'(x_0) = 0$.

Der gælder noget tilsvarende for funktionerne af to variable:

Sætning 5.6.1

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable defineret på en åben mængde O og antag at begge de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ og $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ eksisterer.

Hvis f har et ekstremum i $(x_0, y_0) \in O$, så er $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0) = 0$ og $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0) = 0$.

Hvad en "åben mængde" betyder i denne sammenhæng, vil vi ikke gå i detaljer med, vi vil blot hæfte os ved, at hvis vi skal finde ekstrema for en funktion af to variable, så skal vi kigge efter de punkter hvor begge partielle afledede er nul. Et sådan punkt kaldes et *stationært punkt*. Vi ved altså at evt. ekstrema vil ligge i de stationære punkter. Vi kan dog ikke være sikker på, at bare fordi en funktion har et stationært punkt, så har den også ekstremum i punktet. Det er ligesom med $f(x) = x^3$. Her er $f'(0) = 0$, men f har ikke ekstremum i $x = 0$.

Eksempel 5.6.3

Vi vil bestemme de stationære punkter for funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14x$$

Vi bestemmer først de to partielle afledede:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = 2x - y + 14$$

og

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = 4y - x$$

De partielle afledede skal begge være nul så:

$$2x - y + 14 = 0 \quad \text{og} \quad 4y - x = 0$$

Vi isolerer x i den anden ligning:

$$x = 4y$$

og sætter værdien for x ind i den første

$$2 \cdot (4y) - y + 14 = 0$$

$$7y + 14 = 0$$

$$y = -2$$

Vi indsætter nu værdien for y i den anden ligning $4y - x = 0$

$$4 \cdot (-2) - x = 0$$

$$x = -8$$

Vi konkluderer at f har et stationært punkt i $(-8, -2)$

Øvelse 5.6.3

Bestem stationære punkter for følgende funktioner.

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 10y$

b) $f(x, y) = xy - y$

c) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$

Øvelse 5.6.4

Betragt funktionen $f(a, b) = (2a - b - 1)^2 + (a - 2b + 13)^2$

- a) Regn de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b)$ og $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b)$. I stedet for at hæve parenteserne skal du bruge reglen om differentiation af sammensatte funktioner.

■ b) Bestem de stationære punkter for f .

Det store spørgsmål er nu, hvordan man afgør om et stationært punkt er et ekstremum og i givet fald, hvilket slags ekstremum. Det er selvfølgelig vældigt interessant, men i forhold til lineær regression er det nok for os, at kunne identificere de stationære punkter.

5.7 Regression ved beregning

Beregning af residualer

Vi vender tilbage til vores datasæt:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Tidligere fandt vi ved lineær regression følgende model:

$$y = 0,5x + 2,17.$$

Ud fra vores model, kan vi nemt beregne residualerne. Vi husker at residualerne er afvigelsen mellem data og modellen. Altså kan vi finde det i 'te residual ved:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Her er:

e_i det i 'te residual,

y_i den i 'te y -værdi i data,

$\hat{y}_i$ den i'te estimerede y-værdi ifølge modellen (altså den y-værdi man beregner med den estimerede model).

Eksempel 5.7.1

Vi vil nu kigge på hvordan vi kan beregne residualerne vores data:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi starter med at beregne $\hat{y}_1$. Den første x-værdi er 1, så vi sætter 1 ind i forskriften.

$$\hat{y}_1 = 0,5 \cdot 1 + 2,166667 = 2,666667$$

Tilsvarende regner vi resten af $\hat{y}_i$ 'erne

x_i	y_i	$\hat{y}_i$
1	2	2,666667
3	5	3,666667
5	4	4,666667

Vi regner så det første residual

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = (2 - 2,666667) = -0,666667,$$

og på tilsvarende måde regner vi resten af residualerne:

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i
1	2	2,666667	-0,666667
3	5	3,666667	1,333333
5	4	4,666667	-0,666667

Vi har hermed beregnet residualerne som altså ses i kolonnen til højre.

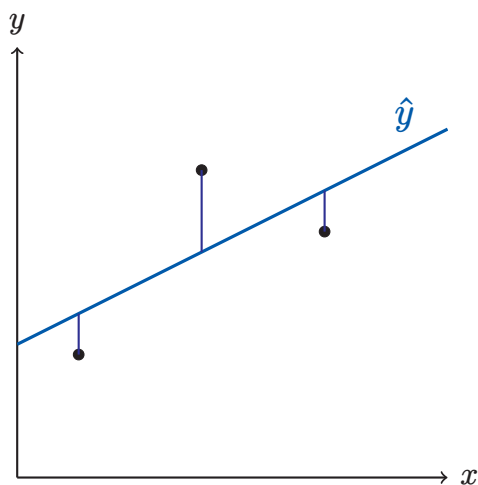
Mindste kvadraters metode

Der findes flere metoder til at beregne regressionsmodeller. Her skal vi se på en metode som hedder ”mindste kvadraters metode”.

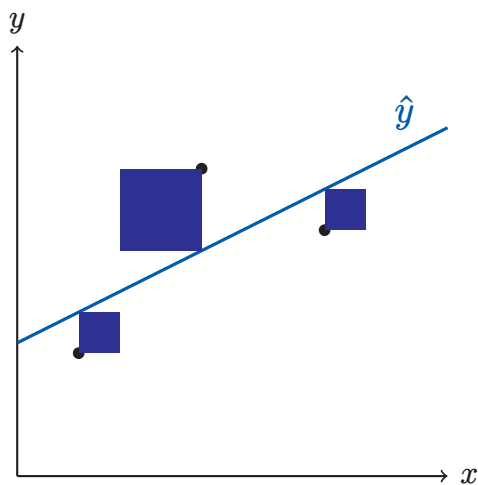
Vi vil igen tage udgangspunkt i datasættet:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi vil først se på ideen i metoden, og derefter hvordan man rent beregningsteknisk finder modellen. Vi starter med at tegne vores punkter ind sammen med en mulig regressionslinje (det er den vi skal bestemme) og residualerne (tegnet med blå):



Vi tegner nu kvadrater ud fra residualerne:



Mindste kvadraters metode går ud på at bestemme den forskrift $y = ax + b$, som gør de blå kvadrater mindst mulige. Da kvadraterne har sidelængde e_i , og dermed areal e_i^2 , skal vi altså bestemme a og b så

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \tag{5.1}$$

bliver mindst muligt.

Vi vil beregne residualerne r på tilsvarende måde som i eksempel 5.7.1, men denne gang er a og b ubekendte i forskriften $\hat{y} = ax + b$. I vores første punkt er $x_1 = 1$ og derfor sætter vi 1 ind på x 'ets plads i forskriften:

$$\hat{y}_1 = a \cdot 1 + b = a + b$$

Tilsvarende sætter regner vi resten af $\hat{y}_i$ 'erne

x_i	y_i	$\hat{y}_i$
1	2	$a + b$
3	5	$3a + b$
5	4	$5a + b$

Vi regner så de kvadratiske residualer:

$$e_1^2 = (y_1 - \hat{y}_1)^2 = (2 - (a + b))^2 = (-a - b + 2)^2$$

og tilsvarende for alle de andre punkter.

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i^2
1	2	$a + b$	$(-a - b + 2)^2$
3	5	$3a + b$	$(-3a - b + 5)^2$
5	4	$5a + b$	$(-5a - b + 4)^2$

Vi finder summen af alle de kvadratiske residualer

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1}^3 e_i^2 &= e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \\ &= (-a - b + 2)^2 + (-3a - b + 5)^2 + (-5a - b + 4)^2\end{aligned}$$

Vi ser nu at summen af kvadratiske residualer afhænger af a og b , og vi kan derfor se den som en funktion af a og b :

$$f(a, b) = (-a - b + 2)^2 + (-3a - b + 5)^2 + (-5a - b + 4)^2,$$

hvor $f(a, b)$ altså betegner summen af de kvadratiske residualer. Åhhh bare vi dog havde en metode til at minimere en funktion i to variable... nej hov vent... Det har vi jo!!! Den lærte vi i afsnittet om ekstrema for partielle afledede. Ifølge sætning 5.6.1 skal vi sætte de partielle afledede lig nul. Vi starter med at bestemme de partielle afledede (og vi husker at bruge reglen for sammensatte funktioner).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}f(a, b) &= 2(-a - b + 2)(-1) + 2(-3a - b + 5)(-3) + 2(-5a - b + 4)(-5) \\ &= 2a + 2b - 4 + 18a + 6b - 30 + 50a + 10b - 40 \\ &= 70a + 18b - 74\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}f(a, b) &= 2(-a - b + 2)(-1) + 2(-3a - b + 5)(-1) + 2(-5a - b + 4)(-1) \\ &= 2a + 2b - 4 + 6a + 2b - 10 + 10a + 2b - 8 \\ &= 18a + 6b - 22\end{aligned}$$

Vi sætter nu de partielle afledede lig med nul:

$$70a + 18b - 74 = 0 \quad 18a + 6b - 22 = 0$$

Vi mangler altså bare at løse to ligninger med to ubekendte. Vi isolerer b i den første ligning:

$$\begin{aligned}70a + 18b - 74 &= 0 \\ b &= -3,88889a + 4,11111\end{aligned}$$

og sætter ind på b 's plads i den anden ligning

$$\begin{aligned}18a + 6b - 22 &= 0 \\18a + 6(-3,88889a + 4,11111) - 22 &= 0 \\a &= 0,5.\end{aligned}$$

Vi kan nu finde b :

$$\begin{aligned}b &= -3,88889a + 4,11111 \\&= -3,88889 \cdot 0,5 + 4,11111 \\&= 2,17.\end{aligned}$$

Vi har nu fundet både a og b og derfor har vi fundet forskriften

$$y = 0,5x + 2,17.$$

Den kritiske læser vil måske være bekymret over, om vi kan være sikker på, at vi har minimeret de kvadratiske afvigelser. At de partielle afledede giver nul, er ikke nogen garanti for et minimum. Vi ved dog at hvis en funktion har et minimum, så er de partielle afledede nul. Da det er oplagt at de kvadratiske afvigelser må have et minimum (hvorfor er det oplagt?), og da der kun en løsning, hvor de partielle afledede er nul, må det være minimum vi har fundet.

Øvelse 5.7.1

Betragt data

x_i	y_i
1	4
2	2
4	5

Du skal nu bestemme en lineær model for data. Jeg har delt det op i 3 bidder, så det bliver nemmere at identificere, hvad der er gået galt, når det er gået galt (for det gør det).

- a) Bestem funktionen $f(a, b)$ som beskriver summen af de kvadratiske residualer.
- b) Bestem de partielle afledte for f
- c) Bestem den lineære model.

Øvelse 5.7.2

Betragt data:

x_i	y_i
0	0
1	1
2	4
3	5

Bestem ved beregning:

- a) funktionen $f(a, b)$ som beskriver summen af de kvadratiske residualer.
- b) de partielle afledte for f
- c) en lineær model for data
- d) residualerne

5.8 Determinationskoefficienten

Determinationskoefficienten R^2 viser løst sagt, hvor langt data ligger fra modellen. Er R^2 tæt på 1, betyder det at data ligger tæt på modellen. Vi skal i det følgende se hvordan R^2 beregnes, hvorefter vi skal kigge mere præcist på dens betydning.

Formlen for R^2 er

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Her er:

e_i det i 'te residual,

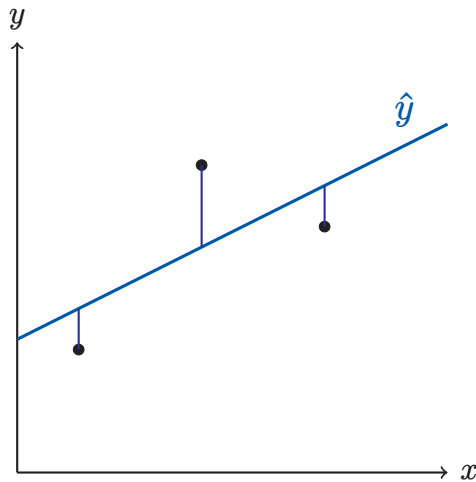
y_i den i 'te y -værdi,

$\bar{y}$ gennemsnittet af y -værdierne.

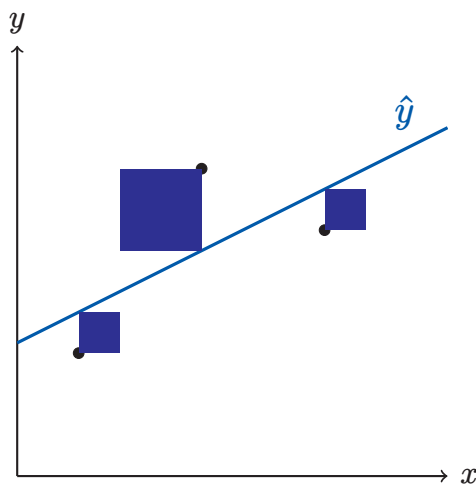
Vi vender tilbage til vores datasæt for at forstå hvad formelen udtrykker:

x_i	y_i
1	2
3	5
5	4

Vi starter med at forklare $\sum_{i=1}^n e_i^2$ i formlen. Vi tegner først data, model og residualer:



I udtrykket $\sum_{i=1}^n e_i^2$ står residualerne i anden. Størrelserne af e_i^2 kan derfor vises med kvadrater som her:

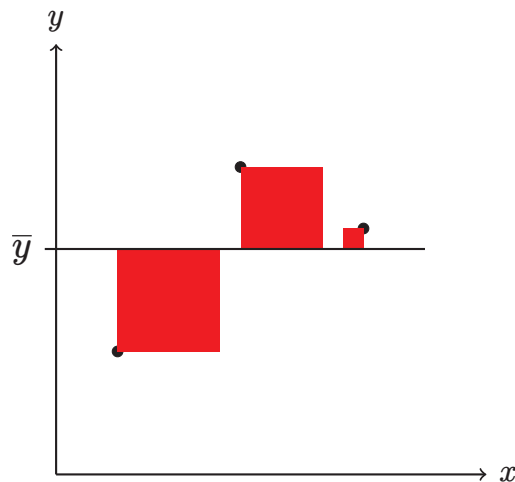


Udtrykket $\sum_{i=1}^n e_i^2$ viser altså det samlede areal af de blå kvadrater. Vi kan se, at jo mindre residualer, jo mindre kvadrater, og derfor er $\sum_{i=1}^n e_i^2$ tæt på nul når punkterne ligger tæt på linjen.

Vi vender nu blikket mod nævneren i brøken i formlen for R^2 :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Vi kan se at dette udtryk også er en sum af kvadratiske afvigelser. Men denne gang er det afvigelserne fra y -værdierne til **gennemsnittet** af y -værdierne $\bar{y}$. Vi kan tegne dem på tilsvarende måde som vi tegnede de kvadratiske residualer (blå kvadrater), bortset fra at vi skal tage udgangspunkt i linjen $y = \bar{y}$ i stedet for regressionslinjen.



Denne sum af kvadratiske afvigelser er lille, når punkterne ligger tæt på linjen gennem $\bar{y}$. Dvs. når alle y -værdierne ligger tæt på hinanden.

Vi kan nu forklare hvorfor R^2 er tæt på 1 når punkterne ligger tæt på linjen. Formlen var:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

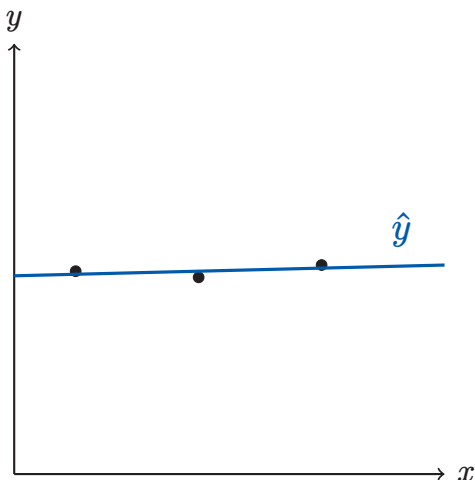
Hvis punkterne ligger tæt på linjen bliver tælleren i brøken tæt på nul, hvilket gør brøken tæt på nul (medmindre nævnerne er tæt på nul

også, hvilket jeg kommer tilbage til) og derfor bliver hele udtrykket tæt på 1.

Vi kan også forklare, hvorfor $0 \leq R^2 \leq 1$. Da både tælleren og nævneren i brøken er ikke-negative, må selve brøken være ikke-negativ. Trækker man noget ikke-negativt fra 1, er det højeste man kan få 1. Så $R^2 \leq 1$. At $R^2 \geq 0$, skyldes at regressionslinjen er den linje, som giver de mindste kvadratiske afvigelser, og derfor må tælleren i brøken være mindre end eller lig med nævneren (som jo er de kvadratiske afvigelser fra linjen $y = \hat{y}$). Dvs. brøken er mindre end eller lig med 1. Altså konkluderer vi:

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Nåh, men vi mangler lige at kigge på situationen, hvor nævneren også er tæt på nul. Det vil den være, hvis punkterne ligger tæt på linjen gennemsnittet, altså hvis alle y -værdierne er næste ens. I det tilfælde vil der typisk ikke være så meget forskel på tæller og nævner i brøken (relativt set), og derfor vil R^2 være lille. Her er et eksempel:



Ovenstående regressionslinje har $R^2 = 0,25$ på trods af at punkterne ligger super tæt på linjen. Så det med at R^2 er tæt på 1 når punkterne er tæt på linjen er lidt upræcist. I stedet kunne man sige at R^2 er tæt på 1, når punkterne ligger meget tættere på regressionsmodellen end på gennemsnittet af y -værdierne.

Eksempel 5.8.1

Antag at vi har et xy-plot der beskriver udviklingen i arbejdsløshed over en periode. Den simpleste beskrivelse af arbejdsløsheden gennem perioden fås ved at beregne den gennemsnitlige arbejdsløshed. Vil man have en bedre beskrivelse, kunne man regne en lineær model for udviklingen. Antag nu at $R^2 = 0,1$ for sådan en model. Fordi R^2 er så lav, er der noget der tyder på, at modellen ikke giver en væsentlig bedre beskrivelse af udviklingen end gennemsnittet.

Man kunne godt blive fristet til at tro R^2 udtrykker, om man har fat i den rigtige model for ens data. Har man f.eks. $R^2 = 0,97$ kunne man tænke at ens data var rigtigt godt beskrevet med en lineær model. Som vi skal se i den efterfølgende øvelse er dette dog ikke korrekt.

Øvelse 5.8.1

Læs følgende Wikipedia-artikel:

https://en.wikipedia.org/wiki/Anscombe's_quartet.

- a) Forklar, hvor det er problematisk at bruge R^2 til at afgøre om data beskrives godt med den lineære model.
- b) Forklar, hvorfor man i nogle tilfælde vil acceptere modeller med en lav R^2 værdi.

Øvelse 5.8.2

I øvelse 5.7.1 regnede du modellen $y = 0,5x + 2,5$ for følgende data.

x_i	y_i
1	4
2	2
4	5

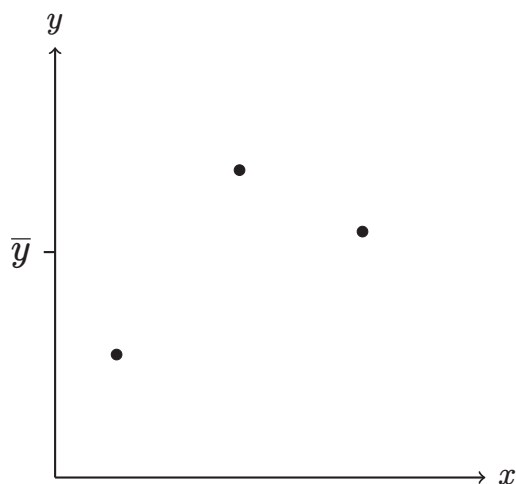
a) Beregn (i hånden) R^2 og fortolk den.

Ekstra

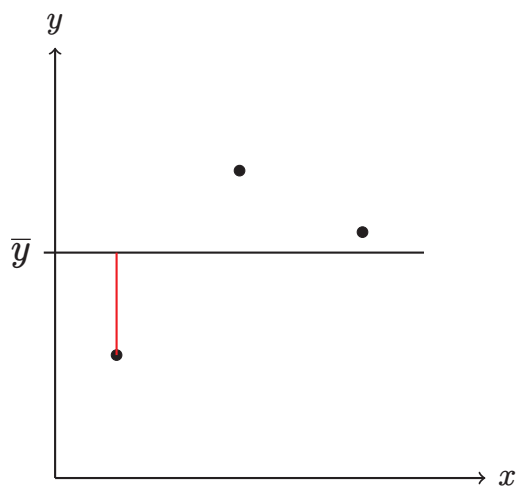
En almindelig fortolkning af R^2 er:

Andelen af den totale variation i y -værdier som er forklaret af modellen.

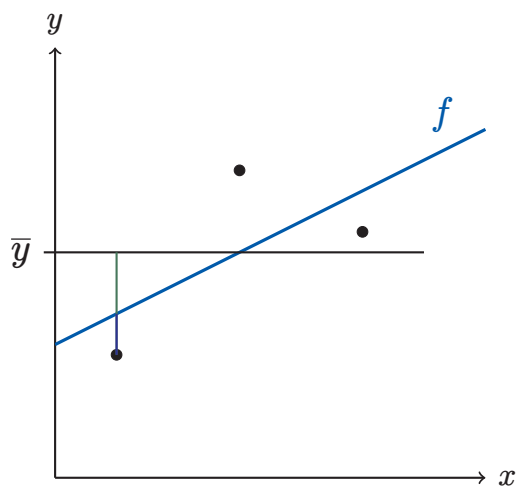
Vi skal nu se hvad det betyder. Vi starter med vores xy-plot:



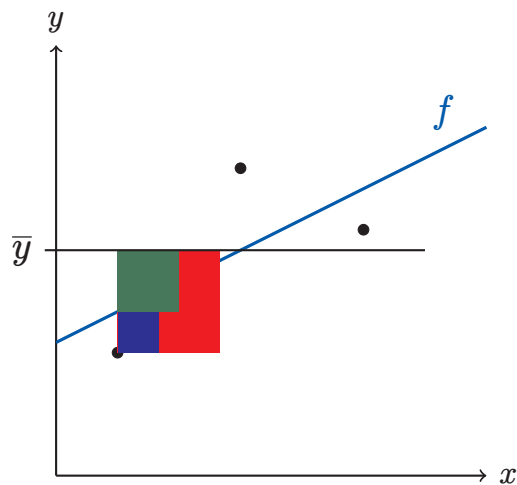
Vi vil nu regne den totale variation i y -værdierne. Der er flere måde at udtrykke variationen, men vi regner den som de kvadratiske afvigelser fra gennemsnittet. I første omgang tegner vi dog kun selve afvigelse ind:



Vi vil nu se om vi kan slippe af med noget af den variation ved at tegne en regressionslinje:



Vi kan se at vi med modellen kommer tættere på punktet og vi er sluppet af med noget af variationen. Den grønne streg viser hvor stor en del af variationen, som modellen har forklaret og den blå viser den variation der stadig er tilbage. Som sagt regner vi variationen som kvadratiske afvigelser, så vi skal tegne kvadrater:



Vi forestiller os nu at vi tegner tilsvarende kvadrater for de andre punkter og indfører følgende betegnelser.

SS_{tot} : Summen af de røde kvadrater, som udtrykker den totale variation.

SS_{reg} : Summen af de grønne kvadrater, som udtrykker den forklarede variation.

SS_{res} : Summen af blå kvadrater, som udtrykker den variation modellen ikke kan forklare.

Med de betegnelser får vi at

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}}$$

Man kan bevise (vil vil ikke gøre det), at når man bruger mindste kvadraters metode til at finde modellen, så er

$$SS_{\text{tot}} = SS_{\text{reg}} + SS_{\text{res}}$$

Vi dividerer med SS_{tot} på begge sider.

$$\frac{SS_{\text{tot}}}{SS_{\text{tot}}} = \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} + \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}}$$

Vi forkorter og omskriver:

$$1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} = \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}}$$

Vi genkender venstresiden som R^2 . Vi husker at SS_{reg} udtrykker den del af den totale variation som modellen kan forklare og dermed er $\frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}}$ andelen af den totale variation som modellen kan forklare. Vi har altså:

$$R^2 = \text{"andelen af den totale variation, som modellen kan forklare"}$$

På grund af dette kaldes R^2 også for forklaringsgraden, da R^2 udtrykker i hvilken grad regressionslinjen forklarer variationen.

Kapitel 6

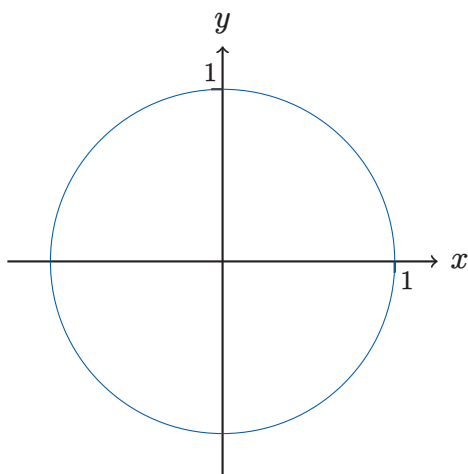
Trigonometriske funktioner (2017-ordning)

Trigonometri er et emne som handler om at bestemme vinkler og sider i trekanter. I trigonometrien møder man de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens. Men dette kapitel handler ikke om trekanter. Det viser sig, at de trigonometriske funktioner har en mere grundlæggende rolle i matematikken, og derfor vil vi springe trekantsberegningerne over, og i stedet gå direkte til de trigonometriske funktioner og deres egenskaber. Den mest interessante egenskab for trigonometriske funktioner er at de er periodiske, hvilket betyder at de efter et stykke tid begynder at gentage sig selv. Derfor kan de bruges til at modellere periodiske bevægelser indenfor f.eks. økonomi. Det kan f.eks. være en virksomhed som sælger en sæsonbetonet vare. Her kan de trigonometriske funktioner bruges til at modellere hvordan virksomhedens omsætning følger årets måneder. Det er sådan vi vil se dem i eksamens-

opgaverne i hvert fald. Om det fungerer på den måde i de virkelige liv er jeg lidt mere i tvivl om, men da de er fundamentale for matematikken, er det bestemt en god ide at lære om dem.

6.1 Enhedscirklen (2017-ordning)

En *enhedscirkel* er en cirkel i et koordinatsystem med centrum i $(0, 0)$ og radius $r = 1$:



Øvelse 6.1.1

- a) Hvad er en enhedscirkel?

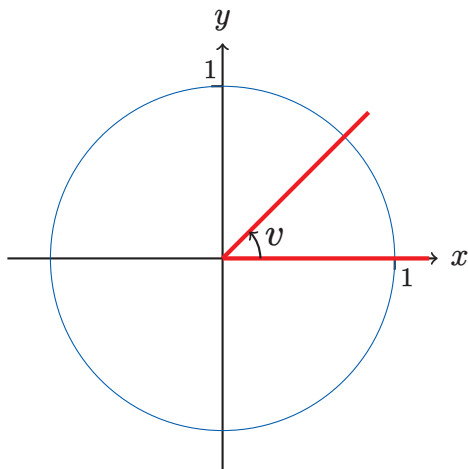
Vi får brug for at kende omkredsen af enhedscirklen. Den er 2π .

Øvelse 6.1.2

- a) Argumenter at omkredsen af enhedscirklen er 2π .

Vinkler i enhedscirklen

Har man en vinkel v , tegner man den ind i enhedscirklen som vist her:



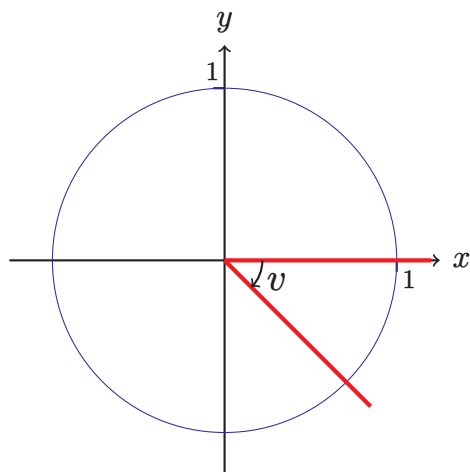
Øvelse 6.1.3

Find papir og blyant frem.

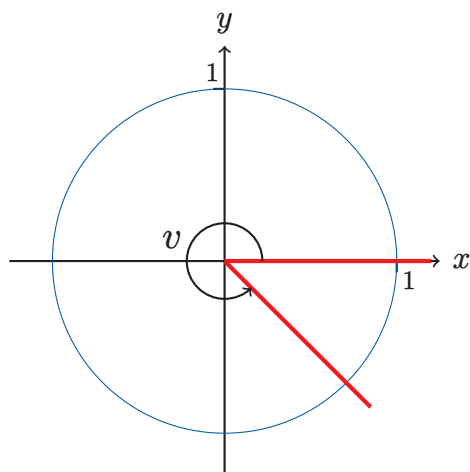
- Tegn en enhedscirkel.
- Tegn vinklen $v = 135^\circ$ ind i enhedscirklen, og inden du siger: "Jeg har jo ikke nogen vinkelmåler med", så siger jeg: "Det er ikke nødvendigt, du kan godt gøre det præcist nok uden".

Negative vinkler

Vi er vandt til vinkler er positive. Vinkler er jo noget, vi måler med vores vinkelmåler, right? Men man kan faktisk godt have negative vinkler. Har vi en vinkel på $v = -45^\circ$, betyder det at den skal se ud som en vinkel på 45° , men at den skal "rottere den anden vej" i enhedscirklen som vist her:



Man kunne tænke at en vinkel på -45° er det samme som en vinkel på 315° som vist her:



Selvom vinklernes ben ligger samme sted i de to enhedscirkler, kan vi se at den sorte buede pil der markerer rotationen er forskellig for de to vinkler. Spørger man mig, ja så vil jeg hellere roteres med -45° end 315° , da 315° ville gøre mig helt rundtossed (det er et større rotation). De to vinkler har dog en noget til fælles. De skærer enhedscirklen i det samme punkt, og netop skæringspunktet med enhedscirklen kommer

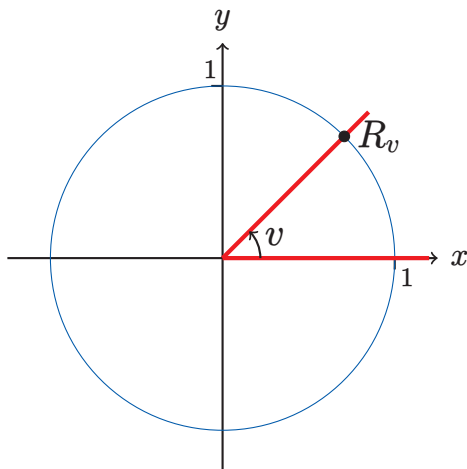
vi til at interessere os for senere.

Øvelse 6.1.4

- a) Tegn vinklen på -180° ind i en enhedscirkel.

Retningspunkter

Når man tegner en vinkel ind i enhedscirklen, ligger man altid vinklens ene ben langs x-aksen. Det punkt hvor vinklens andet ben skærer cirklen kaldes *retningspunktet*. Hedder vinklen v , betegner vi retningspunktet med R_v .



Øvelse 6.1.5

Bestem koordinaterne til retningspunkterne for følgende vinkler.

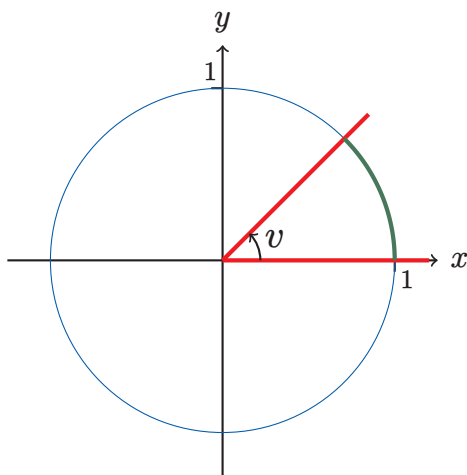
- a) $v = 90^\circ$
- b) $v = 180^\circ$
- c) $v = 270^\circ$

d) $v = 0^\circ$

e) $v = -90^\circ$

Vinkler målt i radianer

I stedet for at måle vinkler i grader, kan man måle dem i noget som hedder *radianer*. Når man måler en vinkel i radianer, måler man længden langs cirkelns periferi (kant) som vist her:



Vinklen v målt i radianer er altså længden af den grønne bue. Størrelsen på en vinkel målt i radianer kaldes radiantallet.

Eksempel 6.1.1

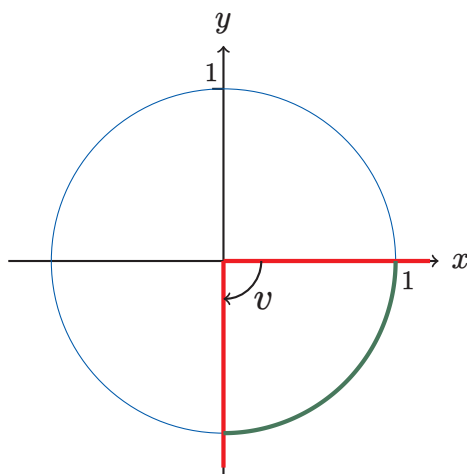
Vi vil nu bestemme radiantallet for vinklen ovenover: Da der er 2π hele vejen rundt, og vi kan se at den grønne bue fylder $\frac{1}{8}$ af cirklen, må vinklen v være $v = \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$. Altså $v = \frac{\pi}{4}$.

Læg mærke til der ikke er nogen enhed på. Det er den måde vi kan se forskel på grader og radianer. Står der $v = 20$, betyder det 20 radianer, mens $v = 20^\circ$ betyder 20 grader.

Vil man finde radiantallet for negative vinkler, fungerer det helt som man skulle tro. Man finder stadig buelængden, men hvis vinklen er negativ, så er radiantallet også negativt.

Eksempel 6.1.2

Vi vil nu bestemme radiantallet for en vinkel på -90° . Vi indtegner først vinklen og derefter indtegner vi buen langs enhedscirklen (igen markeret med grøn):



Da der er 2π hele vejen rundt, og vi kan se at den grønne bue fylder $\frac{1}{4}$ af cirklen, må buelængden være $v = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$. Da v er en negativ vinklen skal der et negativt fortegn på buelængen. Altså $v = -\frac{\pi}{2}$.

Øvelse 6.1.6

Bestem radiantallet for følgende vinkler:

- a) $v = 90^\circ$
- b) $v = 180^\circ$
- c) $v = 0^\circ$

d) $v = -45^\circ$

Øvelse 6.1.7

Bestem koordinaterne til retningspunktet for følgende vinkler. Pas på! Jeg har blandet grader og radianer.

a) $v = 90^\circ$

b) $v = -\pi$

c) $v = 450^\circ$

d) $v = -2$ Her kan du ikke gøre det præcist (endnu). Så et ca. punkt er ok.

Øvelse 6.1.8

a) Udfyld de tomme pladser.

x	0°	45°	90°	135°		225°	270°		
x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π			$\frac{7\pi}{4}$	2π

6.2 Cosinus, sinus og tangens (2017-ordning)

Definition 6.2.1

Lad v være en vinkel med retningspunkt R_v .

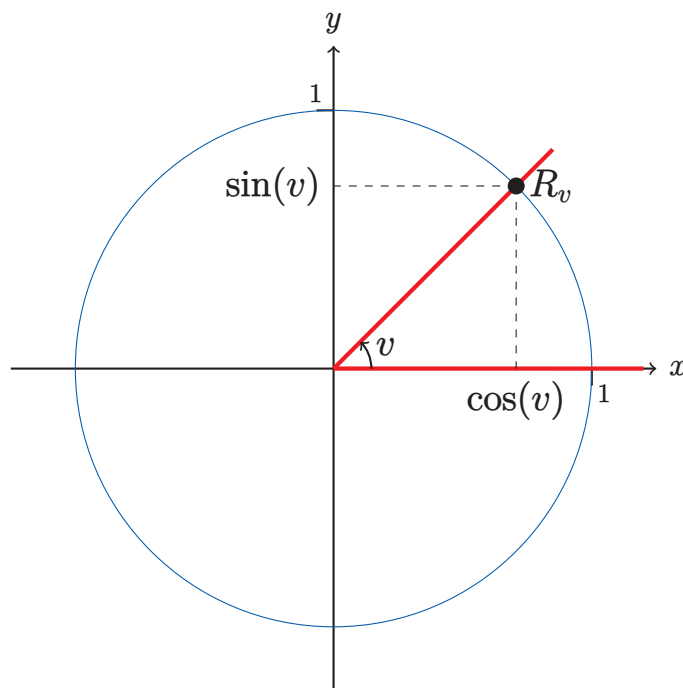
Cosinus til v defineres som førstekoordinaten til R_v og betegnes $\cos(v)$.

Sinus til v defineres som andenkoordinaten til R_v og betegnes $\sin(v)$.

Tangens til v defineres som forholdet $\frac{\sin(v)}{\cos(v)}$ og betegnes $\tan(v)$. Dette

■ gælder selvfølgelig kun hvis $\cos(v) \neq 0$. Ellers er tangens udefineret.

Cosinus og sinus kan illustreres således:



Eksempel 6.2.1

Vi vil bestemme cosinus, sinus og tangens til vinklen på tegningen oven over. Det er svært at se de præcise koordinater til retningspunktet ud fra tegningen, men det ser ud til at cosinus og sinus har samme værdi og at den værdi ligger mellem $\frac{1}{2}$ og 1. Skal vi sige 0,7? Altså

$$\cos(v) = 0,7 \quad \text{og} \quad \sin(v) = 0,7$$

Tangens bliver så

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{0,7}{0,7} = 1$$

Der findes selvfølgelig metoder til at få præcise værdier for cosinus, sinus og tangens, men til at starte med, er det fint at aflæse for at få forståelse på plads

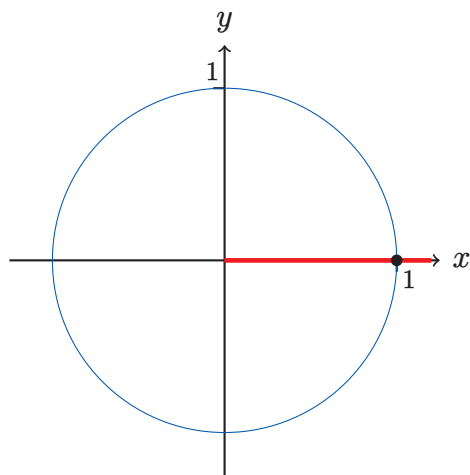
Øvelse 6.2.1

Bestem cosinus, sinus og tangens til følgende vinkler.

- a) $v = \pi$
- b) $v = -2\pi$
- c) $v = 135^\circ$ (bare sådan ca.)
- d) $v = -2$ (bare sådan ca.)
- e) $v = 90^\circ$

Cosinus, sinus og tangens som funktioner

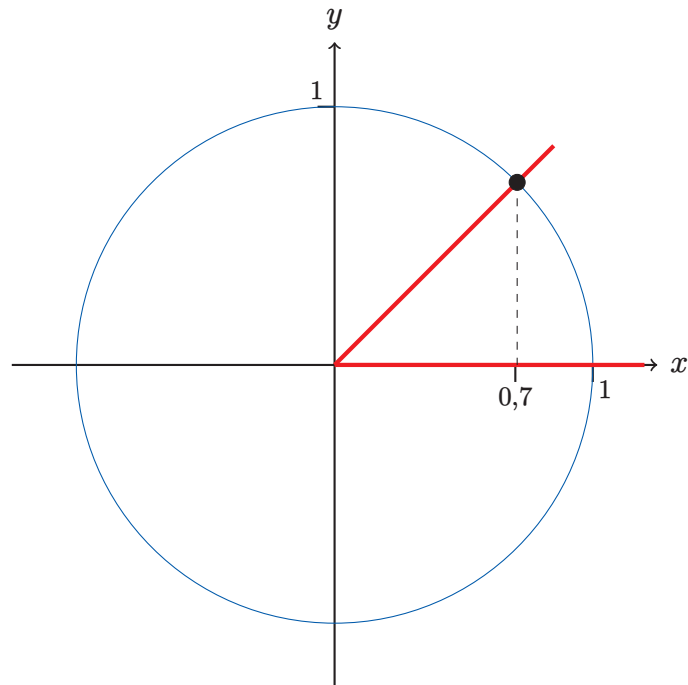
Til enhver vinkel v kan vi bestemme cosinus til v . Vi kan derfor tænke på cosinus som en funktion, nemlig den funktion som til ethvert x knytter $\cos(x)$, dvs. funktionen med forskriften $f(x) = \cos(x)$. Grunden til vi skriver x i stedet for v er at vi gerne vil tænke på cosinus som en almindelig funktion og her plejer vi at kalde variabelen for x . Lad os undersøge hvordan grafen ser ud. Vi tegner grafen ved at lave et sildeben. Vi finder funktionsværdierne ud fra enhedscirklen. Vi starter med $x = 0$. Altså en vinkel på 0.



Vi kan se at retningspunktet for vinklen $x = 0$ har en førstekoordinat på 1. Altså er $\cos(0) = 1$ og dermed er $f(0) = 1$ (husk at vi tegner grafen for $f(x) = \cos(x)$). Der er ikke noget nyt her. Det er præcis som den øvelse I lige har regnet. Det skriver vi ind i et sildeben:

x	0
$f(x)$	1

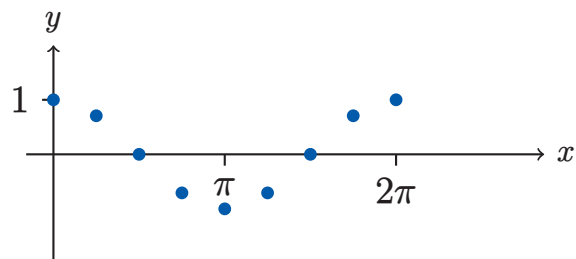
Vi tager lige en til. Vi vælger vinklen på $x = \frac{\pi}{4}$:



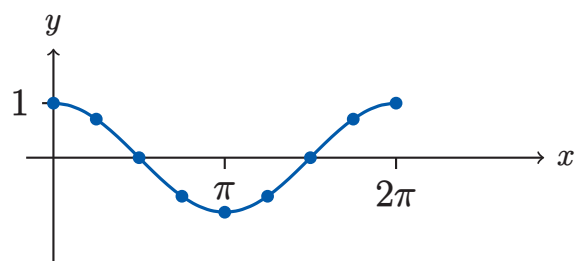
Vi aflæser førstekoordinaten til retningspunkt for vinklen $x = \frac{\pi}{4}$ til at være $x = 0,7$, hvilket vi sætter ind i sildebenet. Sådan forsætter vi rundt i enhedscirklen, hvilket giver os:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	0,7	0	-0,7	-1	-0,7	0	0,7	1

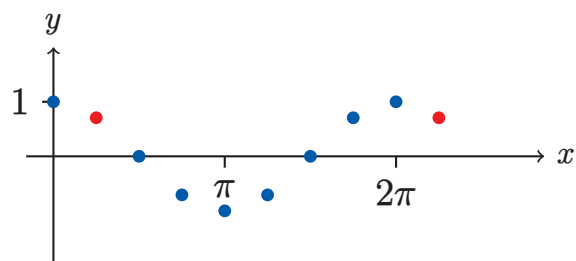
Vi tegner punkterne ind i et koordinatsystem



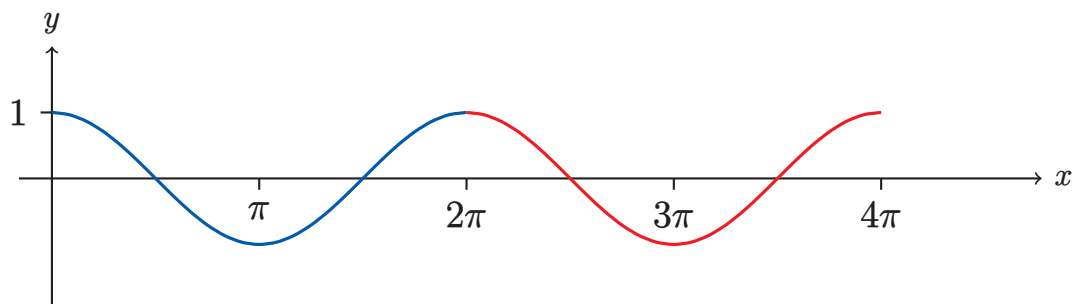
og vi tegner en graf gennem alle punkterne:



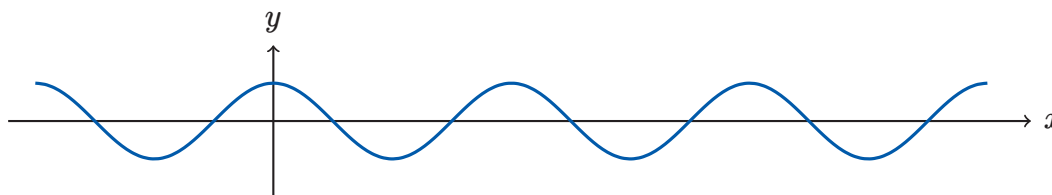
Vi ser at det sidste punkt ligger med samme funktionsværdi (y -værdi) som det første. Det er fordi at vi ved $x = 2\pi$ er nået en helt gang rundt i cirklen og derfor starter vi forfra med de samme funktionsværdier. Tegner vi endnu et punkt ind, ved $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$, får vi:



Vi kan se at dette punkt har samme funktionsværdi som det andet punkt. Sådan kan vi blive ved:



Vi kan se at den røde del af grafen er en nøjagtig kopi af den sorte del. En funktion, som gentager sig selv på den måde, siges at være *periodisk*. Det stykke, man skal gå ud, før at funktion gentager sig selv, kaldes *perioden*. Vi kan se at cosinus er periodisk med periode $T = 2\pi$. Grafen kan selvfølgelig udvides mere – også i negativ retning:



Øvelse 6.2.2

Nu er det din tur til at tegne grafer med papir og blyant som beskrevet ovenover.

- Tegn grafen for sinus i intervallet $[0; 2\pi]$.
- Tegn grafen tangens i intervallet $[0; 2\pi]$. Den her er lidt svær. Du får brug for mange støttepunkter. Det kan være en hjælp at overveje, hvordan grafen må opfører sig, når x er tæt på $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$.

Øvelse 6.2.3

- Argumenter for at sinus er periodisk og kom med et bud for perioden. Få hjælp fra din tegning af grafen.
- Argumenter for at tangens er periodisk og kom med et bud for perioden. Få hjælp fra din tegning af grafen.

6.3 Regning med trigonometriske funktioner (2017-ordning)

De trigonometriske funktioner i Geogebra

Indtil videre har vi bestemt funktionsværdier for de trigonometriske funktioner ved at aflæse i enhedscirklen. Vi kan selvfølgelig finde de præcise værdier i GeoGebra. Det gør vi med kommandoerne

$$\cos(x) \quad , \quad \sin(x) \quad \text{og} \quad \tan(x)$$

Her skal vi være opmærksom på en ting. Hvis vi skriver $\cos(5)$, tror GeoGebra så at 5 er i grader eller radianer? Det er et problem man står med uanset hvilket værktøj man bruger. Skriver man i Algebravinduet, så vil GeoGebra gætte om du mener grader eller radianer, mens at CASvinduet vil opfatte vinklen som værende i radianer. Man kan også regne i grader i CAS, men så skal man skrive det eksplicit, f.eks.: $\cos(5^\circ)$. Jeg vil anbefale at bruge CAS.

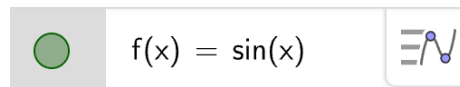
Øvelse 6.3.1

Bestem følgende værdier i Geogebra

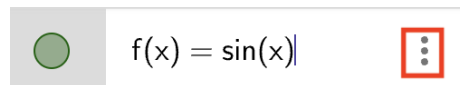
- a) $\cos(45^\circ)$
- b) $\sin(90^\circ)$
- c) $\sin(90)$
- d) $\tan(-2)$

Funktionsundersøgelse med trigonometriske funktioner i GeoGebra

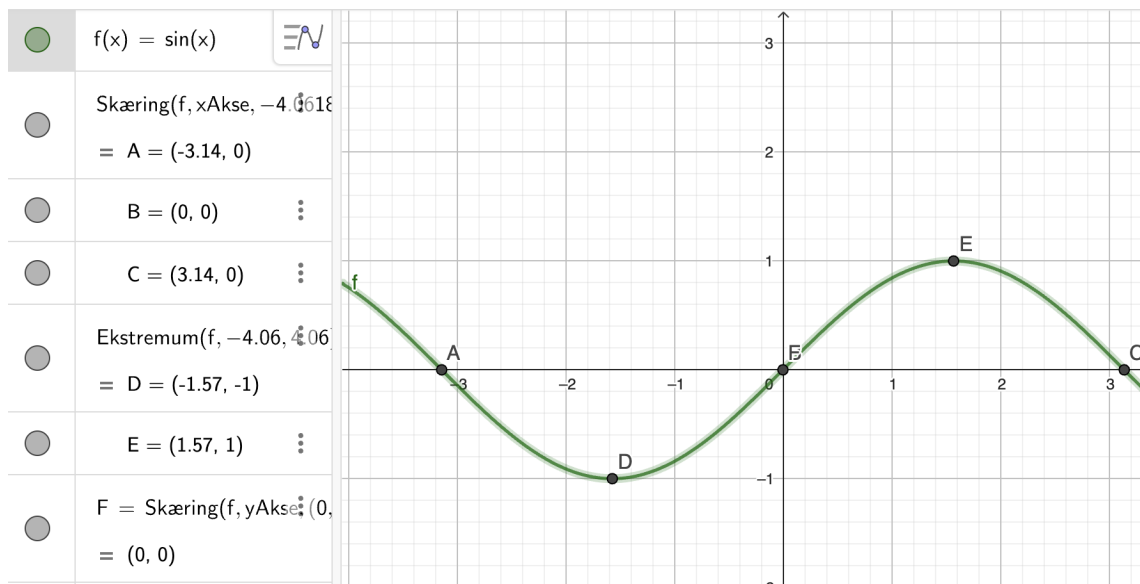
I vil møde funktioner hvis forskrift indeholder trigonometriske funktioner. Typisk er I nødt til at anvende GeoGebra for at kunne regne på dem. Det er nok nemmest at bruge værktøjet **Særlige punkter**. Skal vi f.eks. lave en funktionsundersøgelse af $\sin(x)$, taster vi først funktionen ind i et algebravindue:



Vi trykker nu ind i feltet med forskriften så vi kan se de tre prikker:



Vi trykker på de tre prikker og vælger **Særlige punkter** og får følgende:



På screenshotsket kan vi se ekstrema og nulpunkter. Trigonometriske funktioner har uendelig mange nulpunkter og ekstrema, men Særlige punkter begrænser sig til dem, som er i det udsnit af grafen, der er vist.

Øvelse 6.3.2

Ved hjælp af GeoGebra skal du lave en funktionsundersøgelse af funktionen

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2, \quad x \in [0; 20[$$

Dvs. du skal bestemme:

- Definitionsmængde
- Værdimængde
- Nulpunkter
- Fortegnsvariation

- e) Monotoniforhold
- f) Ekstrema
- g) Krumningsforhold (springes over hvis du ikke har lært om krumningsforhold endnu).
- h) Vendetangenter (springes over hvis du ikke har lært om vendetangenter endnu).

Løsning af trigonometriske ligninger (2017 ordning)

Vi mangler ikke så meget, før vi kan lave ovenstående funktionsundersøgelse i hånden. Det kræver bare lidt viden om hvordan man løser ligninger med trigonometriske funktioner. Så lad os se på nogle eksempler.

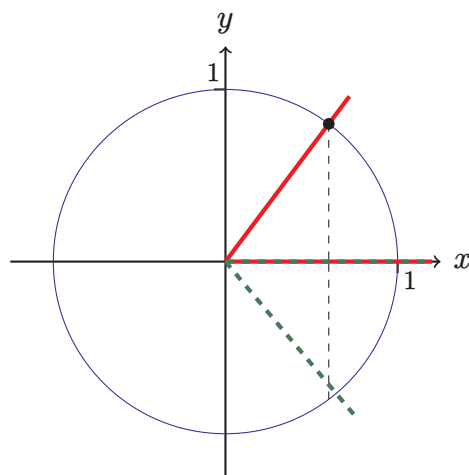
Eksempel 6.3.1

Vi vil løse ligningen $\cos(x) = 0,6$. Vi skal have fat i den omvendte funktion til cosinus så vi kan komme ind til x 'et. Der er bare et problem. Cosinus har ikke nogen omvendt funktion, fordi der findes flere x 'er til hver cosinusværdi. Men vi kan dog finde et enkelt x som løser ligningen med funktionen $\cos^{-1}(x)$. I GeoGebra hedder den $\text{acos}(x)$:



Så $x = 0,93$ er en løsning til ligningen. Men der er flere, og for at

finde dem, har vi brug for en enhedscirkel:



Den røde vinkel på tegningen er den som GeoGebra har fundet. Men vi kan se at der er en anden vinkel (den grønne) med samme cosinusværdi. Vi kan se ud af symmetrien at den må være ligeså stor som den røde, men med negativt fortegn. Altså har den værdien $x = -0,93$. Vi har altså i alt to løsninger til ligningen $\cos(x) = 0,6$ nemlig.

$$x = 0,93 \vee x = -0,93$$

MEN, vi er ikke færdige. Der er godt nok ikke flere retningspunkter på cirklen som har en førstekoordinat på 0,6, men for hver løsning vi har fundet, kan vi finde en ny løsning ved at snurre en hel gang rundt i cirklen (så lander vi jo i samme retningspunkt). Snurre vi en enkelt gang rundt får vi løsningerne

$$x = 0,93 + 2\pi \vee x = -0,93 + 2\pi$$

Men vi kan snurre i begge veje og flere gange rundt, hvilket giver os vores endelige løsninger:

$$x = 0,93 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -0,93 + p \cdot 2\pi,$$

| hvor p er et helt tal.

Øvelse 6.3.3

Betragt ligningen $\cos(x) = 0,3$

- a) Tegn en enhedscirkel og marker en positiv løsning til ligningen i cirklen.
- b) Aflæs en omtrentlig værdi for løsningen.
- c) Tjek din løsning i GeoGebra. Hvad var løsningen med to decimaler?
- d) Ligningen har en til løsning i intervallet $[-\pi; 0]$. Marker denne løsning i enhedscirklen og bestem værdien.
- e) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

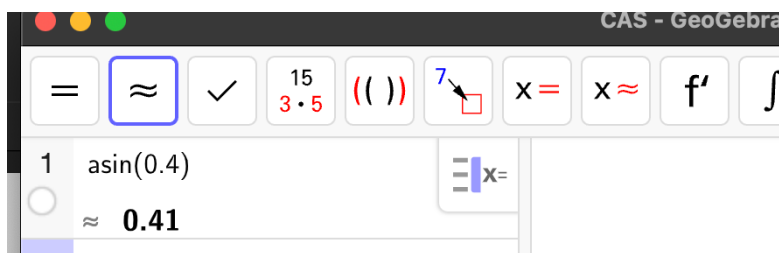
Øvelse 6.3.4

Betragt ligningen $\cos(x) = -0,4$

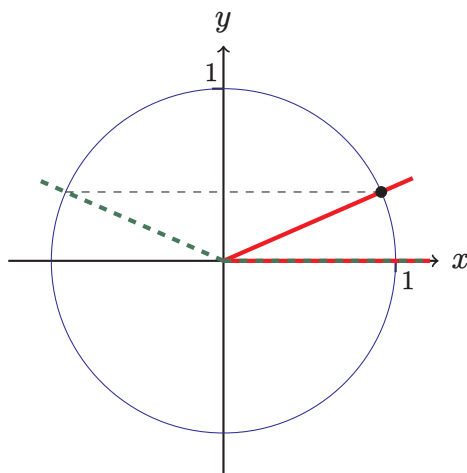
- a) Tegn en enhedscirkel og marker en positiv løsning til ligningen.
- b) Aflæs en omtrentlig værdi for løsningen.
- c) Tjek din løsning i GeoGebra. Hvad var løsningen med to decimaler?
- d) Ligningen har en til løsning i intervallet $[-\pi; \pi]$. Marker denne løsning i enhedscirklen og bestem værdien.
- e) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

Eksempel 6.3.2

Vi vil løse ligningen $\sin(x) = 0,4$. Vi bruger først GeoGebra:



Så $x = 0,41$ er en løsning til ligningen. Vi tegner enhedscirkel



Den røde vinkel på tegningen er den som GeoGebra har fundet (dvs. den er $0,41$)., men vi kan se at der er en anden vinkel (den grønne) med samme sinusværdi. Denne vinkel får vi ved at sige

$$\pi - 0,41 = 2,73$$

Det er fordi vi går en halv gang rundt i cirklen (π) og så tilbage et stykke der svarer til den røde vinkel ($0,41$). Vi husker at sinus også er periodisk med periode $2 \cdot \pi$, så vi får i alt løsningerne.

$$x = 0,41 + p \cdot 2\pi \vee x = 2,73 + p \cdot 2\pi,$$

hvor p er et helt tal.

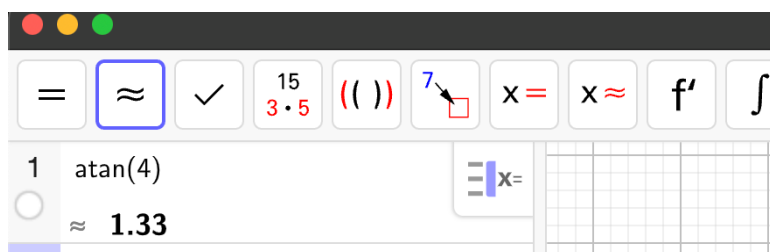
Øvelse 6.3.5

Betragt ligningen $\sin(x) = 0,7$

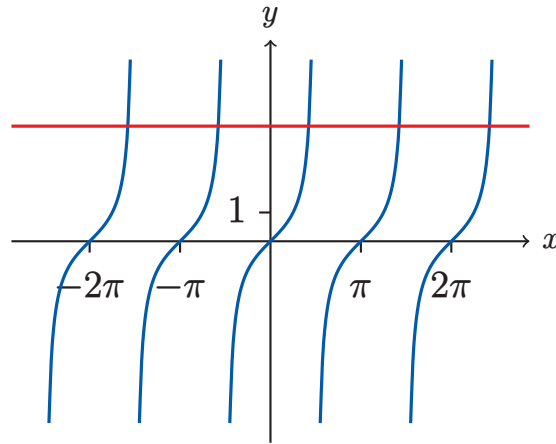
- Tegn en enhedscirkel og marker en løsning til ligningen i cirklen.
- Aflæs en omtrentlig værdi for løsningen.
- Tjek din løsning i GeoGebra. Hvad var løsningen med to decimaler?
- Ligningen har en til løsning i intervallet $[-\pi; \pi]$. Marker denne løsning i enhedscirklen og bestem værdien.
- Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

Eksempel 6.3.3

Vi vil løse ligningen $\tan(x) = 4$. Vi starter i GeoGebra:



Vi ser at $x = 1,33$ er en løsning til ligningen. Vi laver nu en skitse af grafen for tangens og indsætter linjen $y = 4$



Vi ved allerede at tangens er periodisk med periode π og det fremgår af skitsen at der ikke er andre løsninger end dem vi får ved at gå et helt antal perioder ud til begge sider. Altså har vi alt løsningerne.

$$x = 1,33 + p \cdot \pi,$$

hvor p er et helt tal.

Øvelse 6.3.6

Løs ligningerne

- a) $\cos(x) = 0,8$
- b) $\cos(x) = -0,4$
- c) $\sin(x) = 0,6$
- d) $\sin(x) = 2$
- e) $\tan(x) = 2$

Eksempel 6.3.4

Vi vil nu, ved beregning, finde nulpunkter for funktionen:

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2, \quad x \in [0; 20[$$

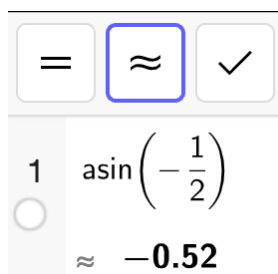
Vi sætter $f(x) = 0$:

$$4 \sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2 = 0$$

Vi isolerer sinusdelen:

$$\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) = -\frac{1}{2}$$

Vi er nået dertil hvor vi gerne vil slippe af med vores sinus. Ligesom i de ovenstående eksempler, starter vi med at finde en enkelt løsning ved hjælp af GeoGebra. Vi regner $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ for at finde den vinkel som har en sinusværdi på $-\frac{1}{2}$:



Vi ser at $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,52$. Men, det er ikke x vi har fundet. Der stod ikke $\sin(x)$ i ligningen. Der stod $\sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right)$. Så det er $\frac{1}{2}x - 6$ der skal være $-0,52$. Vi har altså.

$$\frac{1}{2}x - 6 = -0,52$$

Ved at tegne i enhedscirklen som i de ovenstående eksempler, finder vi samtlige løsninger ved.

$$\frac{1}{2}x - 6 = -0,52 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{1}{2}x - 6 = \pi - (-0,52) + p \cdot 2\pi$$

Vi isolerer x i de to ligninger

$$x = 10,95 + p \cdot 4\pi \quad \vee \quad x = 19,33 + p \cdot 4\pi$$

Vi skal så bare finde ud af hvilke af løsninger der ligger inden for intervallet $[0; 20[$. Vi starter med $x = 10,95$ trækker vi 4π fra det ryger vi ud af intervallet. Lægger vi 4π til ryger vi også ud af intervallet. Vi prøver den anden løsning $x = 19,33$. Lægger vi 4π til ryger vi ud af intervallet, men trækker vi 4π fra, ja så lander vi på 6,76 og det er jo inden for intervallet. Kan vi trække yderligere 4π fra? Nej så ryger vi ud af intervallet. I alt har vi altså løsningerne:

$$x = 6,76 \quad \vee \quad x = 10,95 \quad \vee \quad x = 19,33,$$

hvilket er vores 3 nulpunkter.

Man kunne sige vi snød en lille smule ved at bruge GeoGebra til at finde $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, men vi kan ikke regne den værdi i hånden. I gamle dage brugte man sinustabeller til at slå tallet op. Den slags tabeller er selvfølgelig forældet og derfor er det helt fint at bruge GeoGebra.

Øvelse 6.3.7

Lad $f(x) = 2 \cos(2x + 1) - 1$, $-2 \leq x \leq 2$

- a) Bestem nulpunkter for f . Hvis du ikke kan finde ud af metoden for ovenstående eksempel, så kan du få hjælp fra GeoGebra.

Differentialregning og trigonometriske funktioner

Graferne for de trigonometriske funktioner er uden knæk og spring og derfor kan de differentieres – ja, der er huller i definitionsmængden for tangens, og i de huller har tangens selvfølgelig ikke nogen differentialkvotient (klart, når den ikke defineret der).

Øvelse 6.3.8

Slå differentialkvotienterne for cosinus og sinus op i formelsamlingen og regn følgende differentialkvotienter.

- a) $f(x) = \cos(x)$
- b) $f(x) = \sin(x)$
- c) $f(x) = \sin(x) \cdot x$
- d) $f(x) = 5 \cos(2x - 1) + 3$

Øvelse 6.3.9 (✚)

- a) Gennemfør, ved beregning, funktionsundersøgelsen for

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2, \quad x \in [0; 20[$$

6.4 Beviser - Trigonometriske funktioner (2017-ordning)

I dette afsnit vil vi gerne bevise at tangens er periodisk med periode π . Til det har vi brug for følgende sætning.

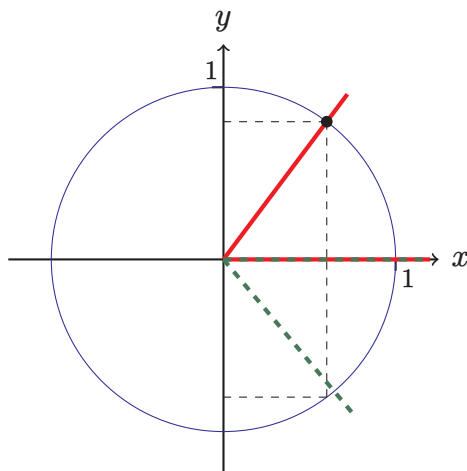
Sætning 6.4.1

For en vilkårlig vinkel x gælder følgende *overgangsformler*:

1. $\cos(-x) = \cos(x)$
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$
3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
4. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

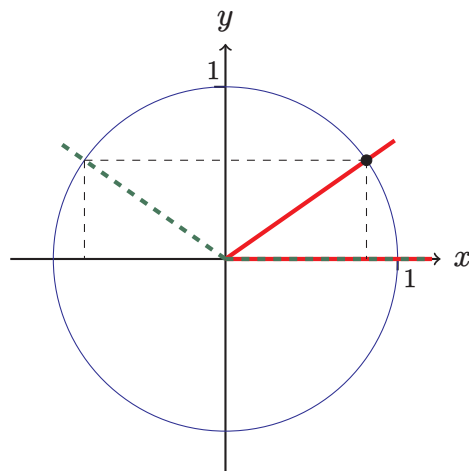
Bevis

Vi starter med vinklerne fra de to første formler:



På ovenstående tegning ses vinklen x tegnet med rød og vinklen $-x$ tegnet med grøn. Det er tydeligt at de har samme cosinusværdi, og at deres sinusværdier er lige store men med omvendt fortegn.

Lad os se på vinklerne i de to sidste formler:



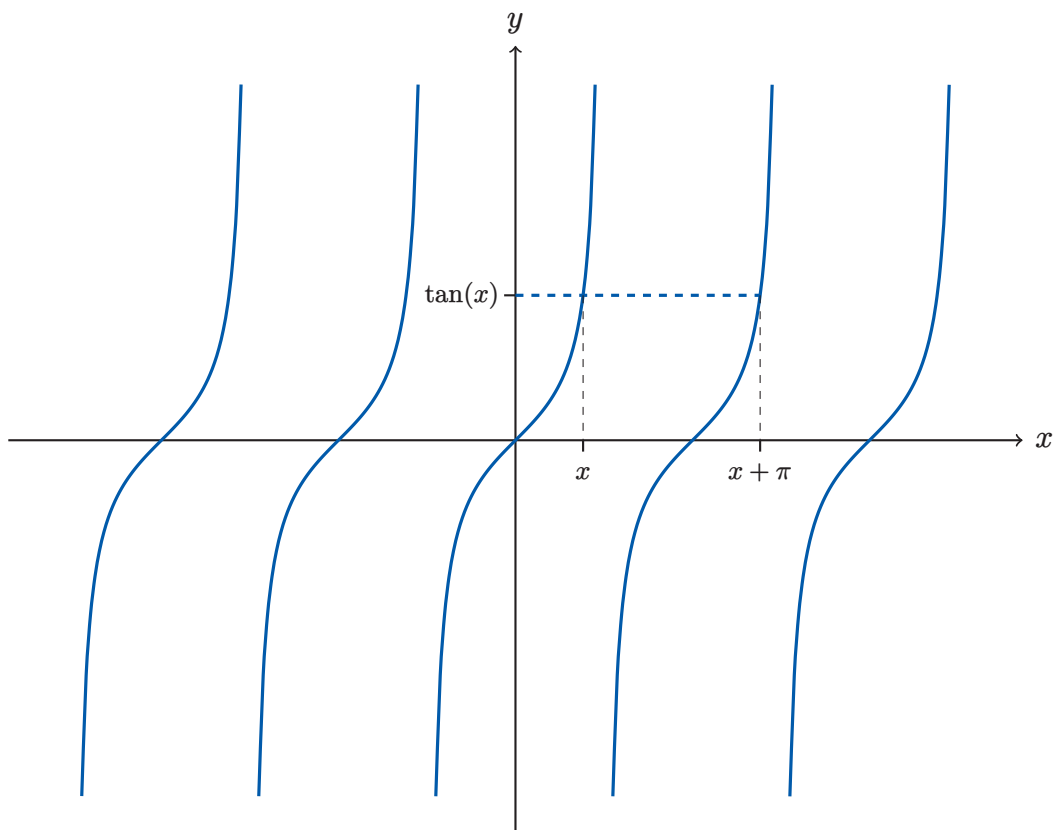
På ovenstående tegning ses vinklen x tegnet med rød og vinklen $\pi - x$ tegnet med grøn. Vinklen $\pi - x$ er selvfølgelig tegnet ved at starte med en vinkel på π og så gå x baglæns. Det er tydeligt at de to vinkler har samme sinusværdi, og at deres cosinusværdier er lige store, men med omvendt fortegn.

Sætning 6.4.2

Tangens er periodisk med periode π .

Bevis

At tangens er periodiske med π betyder at den begynder at gentage sig selv, efter vi er gået π ud af x -aksen. Det må være det samme som at funktionsværdien i et vilkårligt x er den samme som funktionsværdien i $x + \pi$:



Vi skal altså vise at $\tan(x) = \tan(x + \pi)$.

$$\begin{aligned}
\tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} && \text{pr. definition af tangens} \\
&= \frac{\sin(\pi - (-x))}{\cos(\pi - (-x))} && \text{da } x = -(-x) \\
&= \frac{\sin(-x)}{-\cos(-x)} && \text{overgangsformel 3 og 4} \\
&= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} && \text{overgangsformel 1 og 2} \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} && \text{forkortet med } -1 \\
&= \tan(x)
\end{aligned}$$

Vi har nu vist at $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ og tangens er altså periodisk med periode π .

6.5 Trigonometriske funktioner i fysik (2017-ordning)

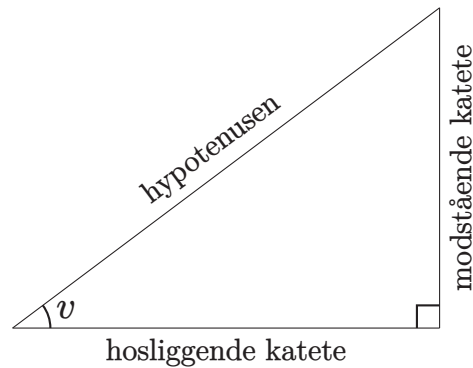
Dele af fysikken kræver en forståelse af trigonometriske funktioner. Her er det ikke helt nok at kunne aflæse værdier i en enhedscirkel eller løse en trigonometrisk ligning. I dette afsnit vil vi bygge på, så vi er klar til de udfordringer, vi møder med trigonometriske funktioner i fysikken.

Beregning af sider og vinkler i retvinklede trekanter

I forbindelse med analyse af kræfter har vi brug for at regne sider og vinkler i retvinklede trekanter. Følgende sætning burde være kendt fra folkeskolen (måske formuleret lidt anderledes).

Sætning 6.5.1

Betragt den retvinklede trekant:



Der gælder:

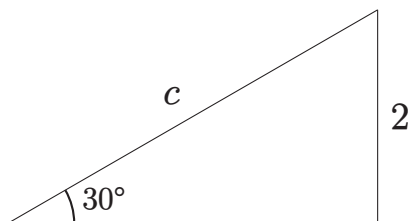
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Eksempel 6.5.1

Betragt trekanten



Vi vil beregne længden af hypotenusen c . Vi finder en formel fra sætning 6.5.1, som indeholder de to størrelser vi kender (vinkel og modstående katete)

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi indsætter vores oplysninger:

$$\sin(30^\circ) = \frac{2}{c}.$$

Vi isolerer c :

$$c = \frac{2}{\sin(30^\circ)},$$

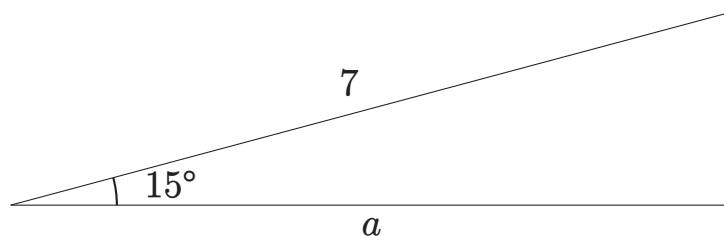
og regner resultatet i GeoGebra/lommeregner:

$$c = 4.$$

Længden af hypotenusen er altså 4.

Øvelse 6.5.1

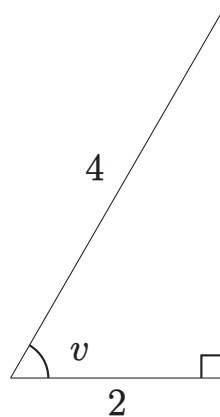
Betragt den retvinklede trekant:



- a) Beregn sidelængden a
- b) Beregn resten af siderne og vinklerne

Eksempel 6.5.2

Betragt trekanten:



Vi vil bestemme v . Vi finder den formel som indeholder de størrelser vi har:

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi indsætter

$$\cos(v) = \frac{2}{4},$$

og regner

$$\cos(v) = 0,5,$$

og isolerer v :

$$v = \cos^{-1}(0,5),$$

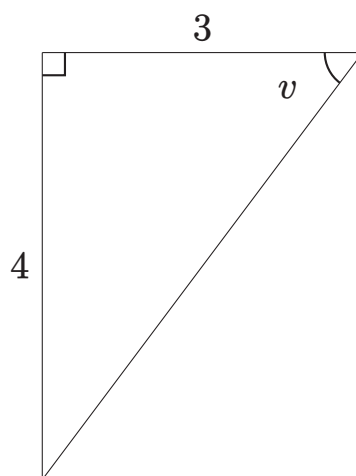
og får:

$$v = 60^\circ,$$

og det passer da meget godt med tegningen.

Øvelse 6.5.2

Betragt trekanten:



- Bestem vinklen v
- Bestem resten af vinklerne og siderne i trekanten.

Harmoniske svingninger

I fysik bruges harmoniske svingninger til at beskrive bølger.

Definition 6.5.1

En *harmonisk svingning* er en funktion på formen

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

hvor:

a er et positivt tal som kaldes amplituden

b er et positivt tal som kaldes vinkelfrekvensen,

c et tal som kaldes faseforskydningen.

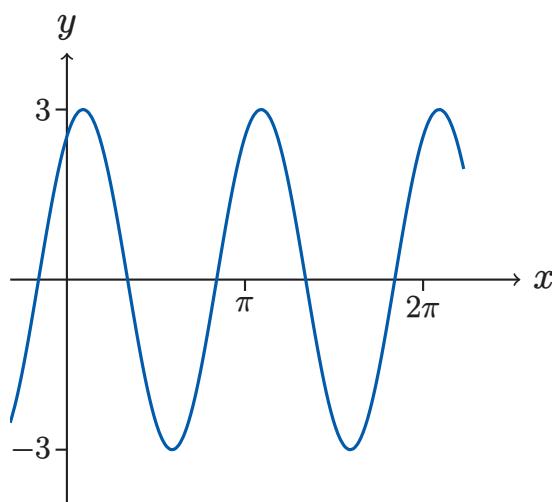
Grafen for harmonisk svingning ligner grafen for sinus, bortset fra den er strukket/sammenpresset i vandret og/eller lodret regning. Hvordan grafen bliver forskudt/strukket afhænger af værdien af konstanterne i definitionen.

Amplitude

Amplituden er konstanten a i den harmoniske svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$. Vi husker at sinus er andenkoordinaten til retningspunktet på enhedscirklen. Derfor vil sinus svinge mellem -1 og 1 . Når vi så ganger med a , kommer funktionsværdierne til at svinge mellem $-a$ og a . Så amplituden a viser altså, hvor meget grafen er strukket i lodret retning.

Eksempel 6.5.3

Betragt grafen for $f(x) = 3 \cdot \sin(2x + 1)$:



Amplituden for f er 3, så vi forventer at grafen svinger mellem -3 og 3 på y -aksen. Vi ser det passer med grafen.

Øvelse 6.5.3

Lad $f(x) = 7 \cdot \sin(5x - 2)$

- a) Bestem ud fra forskriften definitionsmængden for f .
- b) Bestem ud fra forskriften værdimængden for f .

I forbindelse med bølger vil amplituden afgøre, hvor meget energi der er i bølgen. Høj amplitude betyder meget energi.

Vinkelfrekvens

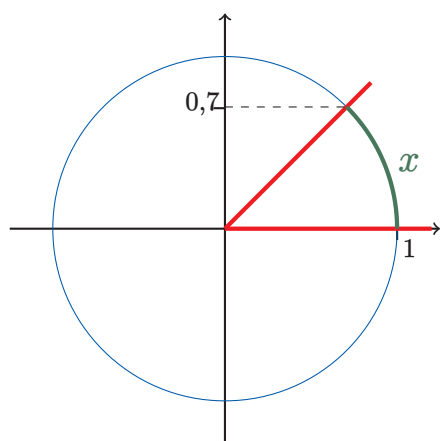
Vinkelfrekvensen er konstanten b i den harmoniske svingning:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

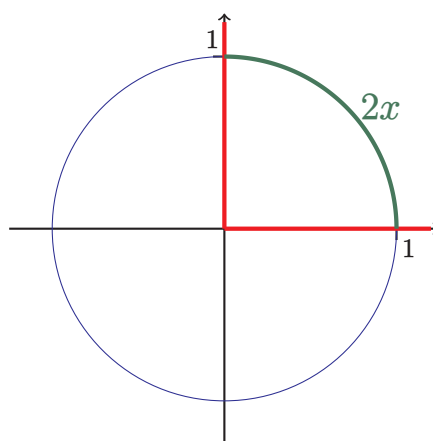
Vinkelfrekvensen afgør hvor hurtigt funktionen svinger. Det vil vi forklare med udgangspunkt i funktionerne:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{og} \quad g(x) = \sin(2x)$$

Vi vil se på de to funktioners funktionsværdi, når $x = \frac{\pi}{4}$. Vi tegner to enhedscirkler. En med vinklen x og en med vinklen $2x$:

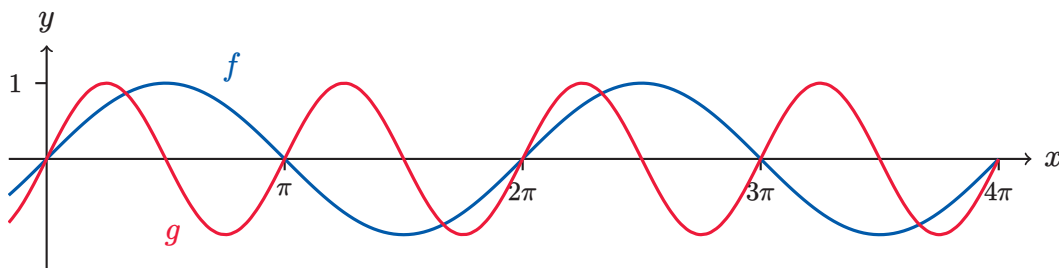


$$f(x) = \sin(x) = 0,71$$



$$g(x) = \sin(2x) = 1$$

Vi ser, at g bevæger sig dobbelt så hurtigt rundt i enhedscirklen som f . Grafen for g former sig derfor som grafen for f bare dobbelt så hurtigt. Så mens perioden for f er 2π , er perioden for g kun π . Graferne kommer altså til at se således ud:



Perioden kan bestemmes ud fra vinkelfrekvensen b ved følgende formel

(som vi beviser i ekstraafsnittet):

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Eksempel 6.5.4

Antag at perioden for en trigonometrisk funktion er 8π . Vi vil bestemme vinkelfrekvensen. Vi har

$$T = \frac{2\pi}{b}.$$

Vi isolerer b

$$b = \frac{2\pi}{T},$$

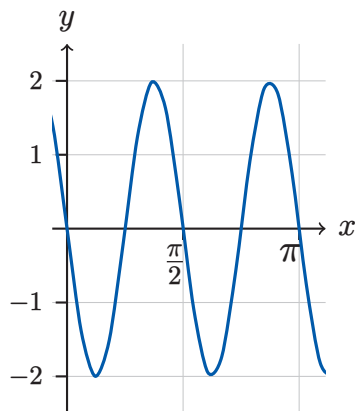
og indsætter perioden

$$b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}.$$

Vi konkluderer at vinkelfrekvensen er $\frac{1}{4}$.

Øvelse 6.5.4

Betragt den harmoniske svingning:



- a) Bestem amplituden
- b) Bestem perioden
- c) Beregn vinkelfrekvensen

Vær opmærksom på at i fysik optræder der også begrebet *frekvens* som betegnes med f . Det er noget andet end vinkelfrekvens. Man snakker om frekvens, når man har tid ud af x -aksen. Her er viser frekvensen antallet af svingninger (perioder) på 1 sekund, og den kan beregnes ud fra perioden ved:

$$f = \frac{1}{T}$$

Øvelse 6.5.5 (✚)

Frekvensen f er antallet af svingninger på 1 sekund.

- a) Argumenter for at f kan bestemmes ved formelen $f = \frac{1}{T}$

Øvelse 6.5.6 (✚)

Frekvensen kan beregnes ud fra vinkelfrekvensen b . Formlen er:

$$f = \frac{b}{2\pi}$$

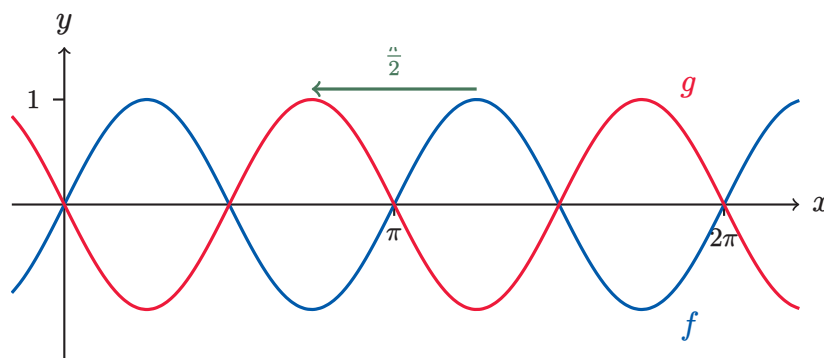
- a) Bevis formelen. VINK: Du får brug for at inddrage formelen for vinkelfrekvens: $T = \frac{2\pi}{b}$.

Faseforskydningen

Faseforskydningen er konstanten c i den harmoniske svingning:

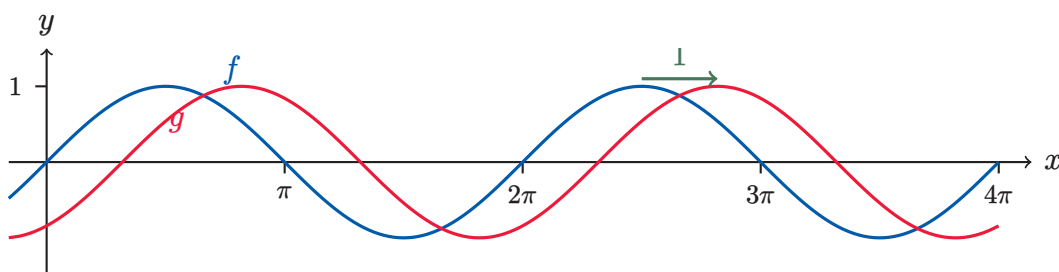
$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

Faseforskydningen forskyder grafen i vandret retning. Men forskydningen afhænger ikke kun af c . Den afhænger også af b . Grafen forskydes nemlig med $\frac{c}{b}$ til venstre. Hvis $c < 0$, får vi en negativ forskydning til venstre, hvilket selvfølgelig svarer til en positiv forskydning til højre. Så hvis f.eks. $c = \pi$ og $b = 2$ vil grafen blive forskudt med $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{2}$ til venstre – altså i forhold til hvis c var nul.



Grafer for $f(x) = \sin(2x)$ og $g(x) = \sin(2x + \pi)$.

Hvis c er negativ bliver grafen forskudt til højre:

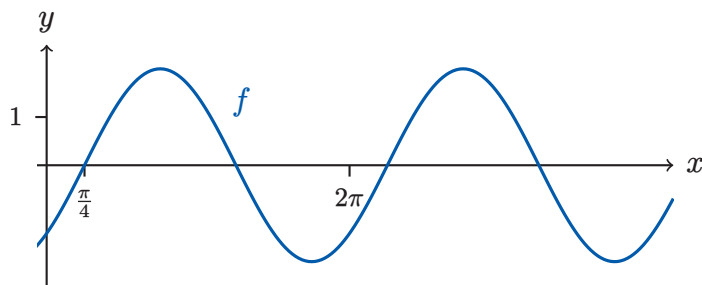


Grafer for $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \sin(x - 1)$.

Læg mærke til at når faseforskydningen er nul, så går grafen igennem $(0, 0)$ og starter med at være voksende, så det er udgangspunktet, når vi skal finde ud af hvor meget grafen er forskudt.

Eksempel 6.5.5

Betragt den harmoniske svingning:



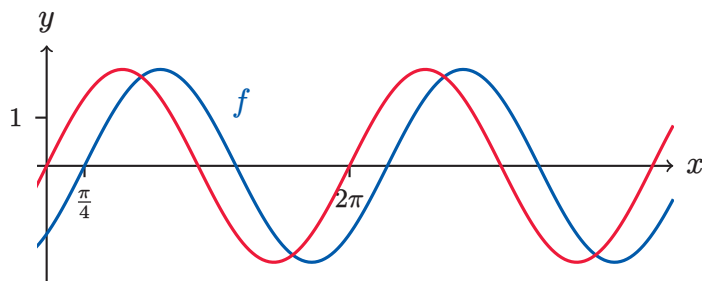
Vi vil bestemme faseforskydningen. Vi skal først bestemme b . Den kan vi finde ud fra perioden. Vi aflæser perioden til at være 2π . Vi ved ved at perioden er givet ved:

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Vi indsætter $T = 2\pi$ og isolere b : Det giver:

$$b = 1$$

Vi er nu klar til at finde faseforskydningen c . Vi tegner nu den samme harmoniske svingning ind, men denne gang forskyder vi den så den starter med at være voksende igennem $(0, 0)$



Vi kan se at den blå graf er forskudt med $\frac{\pi}{4}$ til højre i forhold til den røde. Dvs. at

$$\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$$

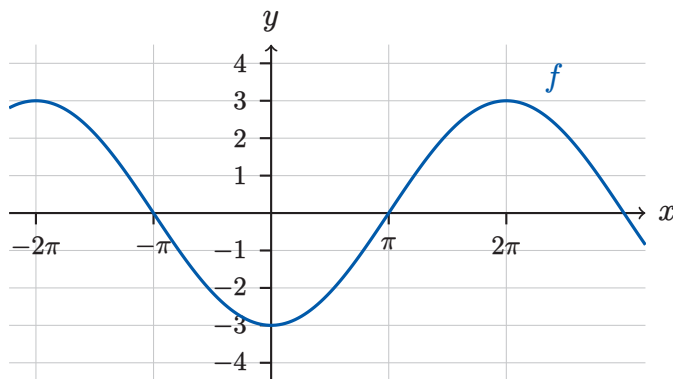
Læg mærke til det negative fortegn. Det er fordi det er en forskydning til højre. Vi har allerede bestemt $b = 1$:

$$\frac{c}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

hvilket må betyde at $c = -\frac{\pi}{4}$.

Øvelse 6.5.7

Betragt grafen for en harmonisk svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$.



- a) Bestem amplituden
- b) Bestem perioden
- c) Beregn vinkelfrekvensen
- d) Bestem faseforskydningen

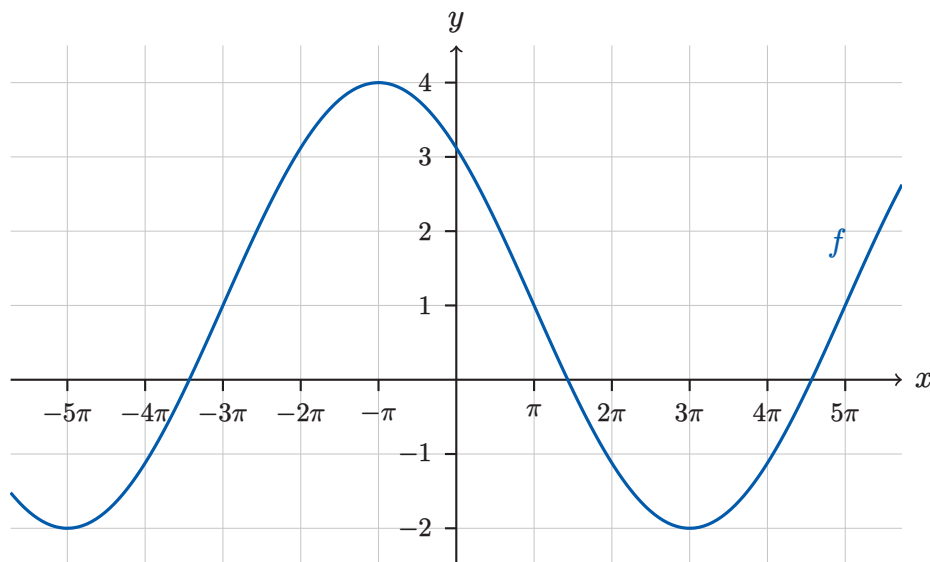
Øvelse 6.5.8

Harmoniske funktioner kan også defineres ved:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

Vi ser at der i denne definition er lagt en konstant d til. Denne konstant kaldes *forskydningsaksen*.

- a) Forklar betydningen af konstanten d . Hvis du er i tvivl om, hvordan du skal afgøre det, så husk på hvad der normalt sker med grafen for en funktion, når man lægger en konstant til.
- b) Aflæs værdien af d på grafen:



- c) Bestem perioden.
- d) Bestem resten af konstanterne i forskriften.
- e) Bestem frekvensen

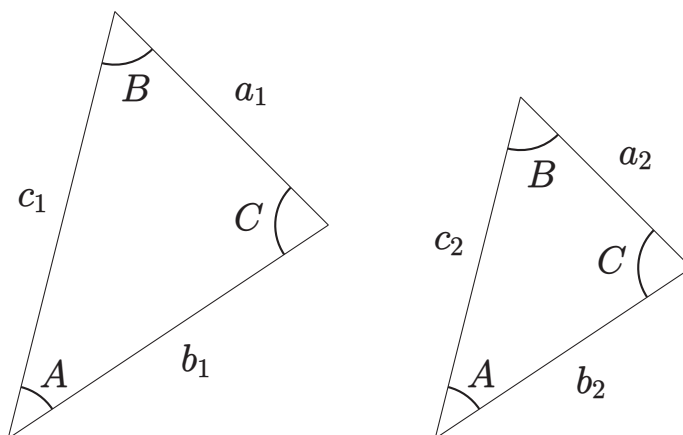
Ekstra

Uledning af formler for vinkler og sider i retvinklede trekanter

Man kan undre sig over, hvor sætning 6.5.1 kommer fra. De trigonometriske funktioner er jo defineret ud fra enhedscirklen og hvad har det med retvinklede trekanter at gøre? Lad os se på det. Først har vi brug for en sætning for ensvinklede trekanter:

Sætning 6.5.2

Lad der være givet to ensvinklede trekanter:



Da gælder:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}, \quad \text{og} \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$$

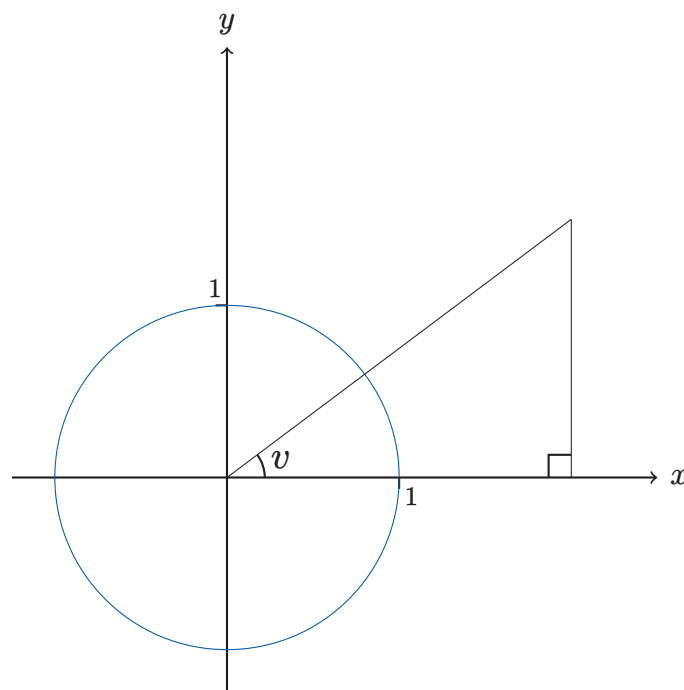
Vi vil ikke bevise sætningen, men den burde ikke være så overraskende.

Vi vil nu bevise påstanden:

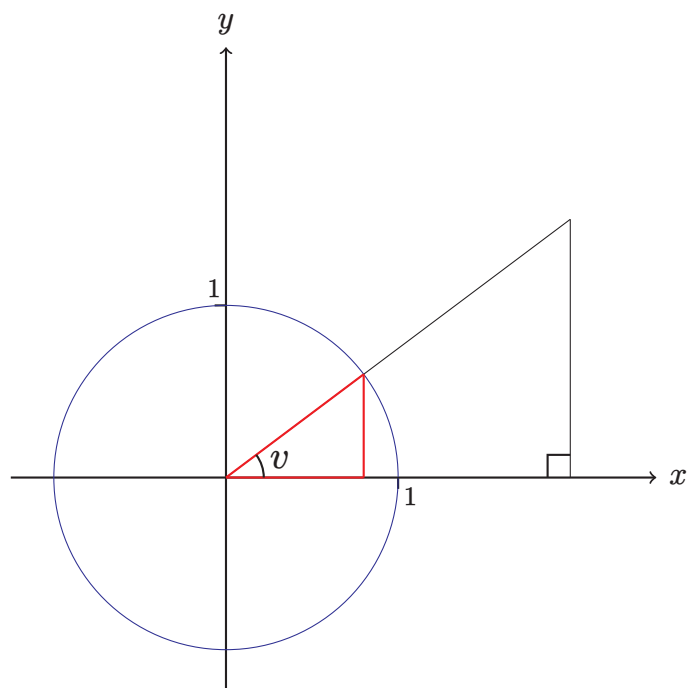
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi starter med en enhedscirkel og en retvinklet trekant:

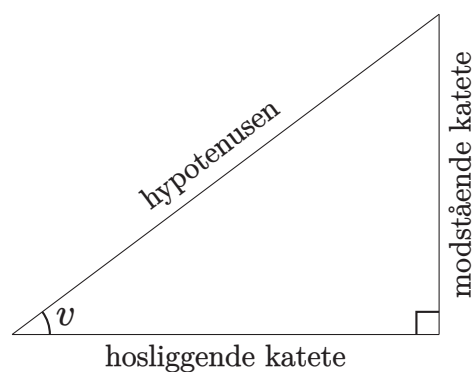
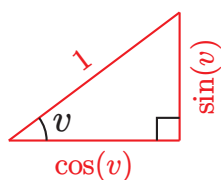
Vi flytter trekanten ind i enhedscirklen som vist her:



Ud fra retningspunktet for v tegner vi endnu en trekant



Vi har nu to ensvinklede trekanter. Da det øverste højre hjørne i den røde trekant er retningspunktet, må trekantens kateter have hhv. længderne $\cos(v)$ og $\sin(v)$. Hypotenusen i den røde trekant må være 1, da det jo er radius i enhedscirklen. Så de to trekanter ser således ud.



Da de to trekanter er ensvinklede kan vi bruge sætning 6.5.1. Vi

får

$$\frac{\cos(v)}{1} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi reducerer og får den ønskede formel

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Øvelse 6.5.9

Bevis formlerne (fremgangsmåden er tilsvarende den du lige har set.):

a) $\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$

b) $\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$

Sammenhæng mellem periode og vinkelfrekvens

Man kan regne perioden ud fra vinkelfrekvensen med formelen

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Vi vil nu udlede denne formel. Vi har den harmoniske svingning

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

Perioden er den (mindste) konstant T som opfylder:

$$f(x) = f(x + T)$$

Vi indsætter forskriften for f :

$$a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin(b(x + T) + c)$$

Vi regner parentesen inde i sinus på højresiden:

$$a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin(bx + bT + c)$$

Vi kan se at der står det samme på begge sider bortset fra størrelsen bT , som er lagt til inde i sinus funktionen på højresiden. Da sinus er periodisk med 2π , skal denne størrelse give 2π før at vi får det samme på begge sider af lighedstegnet. Dvs.

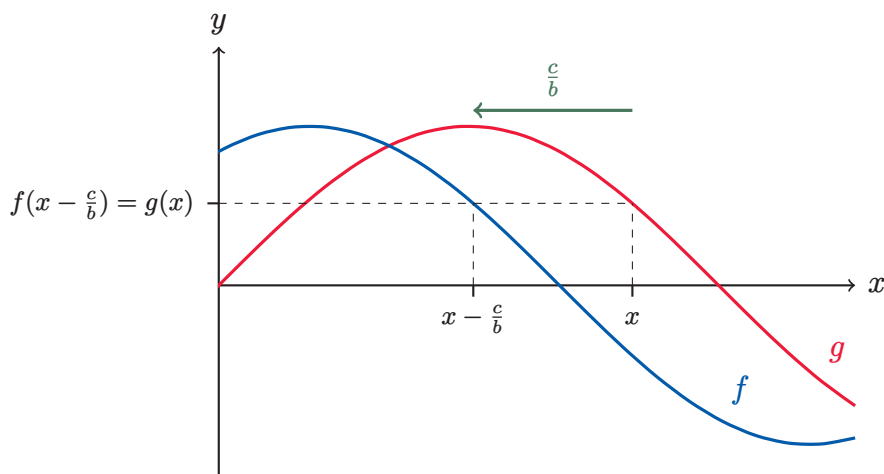
$$bT = 2\pi$$

Vi deler med b :

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Faseforskydning

Faseforskydningen forskyder grafen langs x -aksen. Mere præcist: Grafen for funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ fremkommer ud fra grafen for $g(x) = a \cdot \sin(bx)$ ved at forskyde g med $\frac{c}{b}$ til venstre, hvis $c > 0$. Vi vil nu vise dette. Vi starter med en illustration af påstanden:



Tegning viser at f er opstået ud fra g ved en vandret forskydning til venstre med $\frac{c}{b}$, hvis f opfylder $f(x - \frac{c}{b}) = f(x)$. Så vi skal altså eftervise at $f(x - \frac{c}{b}) = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x - \frac{c}{b}) &= a \cdot \sin(b(x - \frac{c}{b}) + c) \\ &= a \cdot \sin(bx - b\frac{c}{b} + c) \\ &= a \cdot \sin(bx - c + c) \\ &= a \cdot \sin(bx) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Så jo, den var god nok. Grafen for f er opstået ud fra grafen for g ved at forskyde g med $\frac{c}{b}$ til venstre.

Øvelse 6.5.10 (♣)

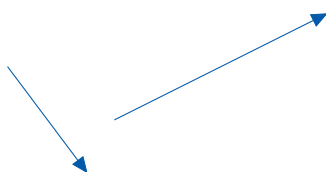
I ovenstående har vi taget udgangspunkt i en positiv faseforskydning, når vi tegnede grafen for f .

- a) Hvordan kunne tegningen se ud, hvis c er negativ?

Kapitel 7

Vektorer (2017-ordning)

Vektorer på HHX er det som også går under navnet *euklidiske vektorer* og det handler om at regne med ”pile”. Altså sådan nogle:

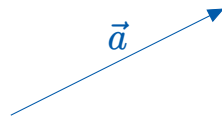


Man kan undrer sig over at den slags geometrisk pjat skulle være interessant for en HHX'er, men euklidiske vektorer viser sig at være indgangen til et mere generelt vektorbegreb, som ikke er udelukkende geometrisk, og som er meget anvendeligt. Vi holder os til det geometriske – som i øvrigt også er ganske anvendeligt (i naturvidenskab).

7.1 Introduktion til vektorer (2017-ordning)

Definition 7.1.1

En *vektor* er et objekt, som har både en længde og en retning. En vektor tegnes som en pil, hvor pilens retning er vektorens retning, og pilens længde er vektorens længde.



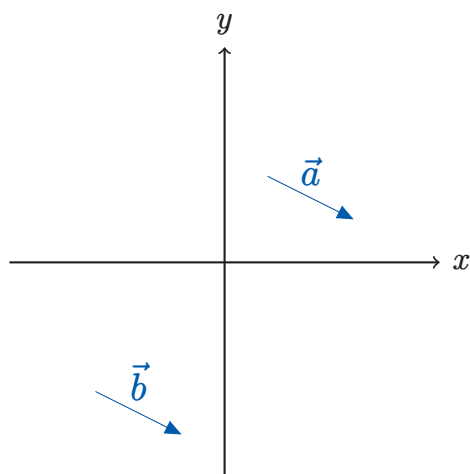
Vektoren på tegningen læses "vektor a". Der findes en særlig vektor som har en længde på nul, men ikke nogen retning. Den kaldes *nulvektoren*, betegnes med $\vec{0}$ og tegnes som en prik:



En vektor som **ikke** er nulvektoren kaldes en *egentlig vektor*.

Længen af $\vec{a}$ betegnes med $|\vec{a}|$.

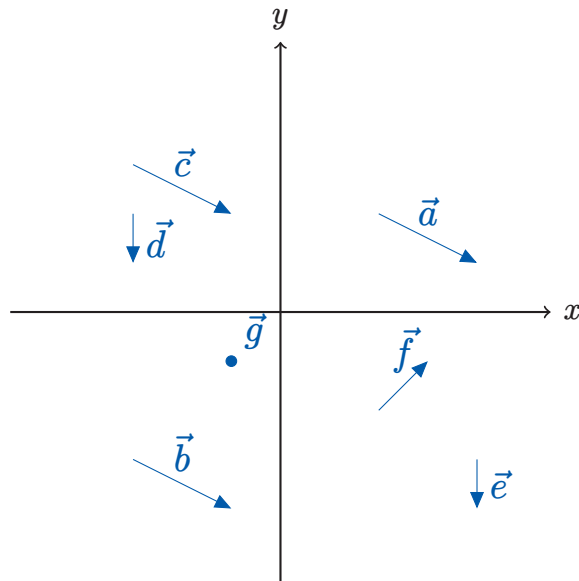
Vi tegner nogle gange vektorer ind i koordinatsystemer.



Her kunne det godt se ud som jeg har tegnet to forskellige vektorer, men fordi $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har samme størrelse og retning, så er de ens. Altså $\vec{a} = \vec{b}$. Man siger at de to pile er to forskellige *repræsentanter* for den samme vektor.

Øvelse 7.1.1

Betragt vektorerne



a) Hvor mange forskellige vektorer er der?

Regning med vektorer

Lad os se på hvordan vi regner med vektorer. Vi starter med addition.

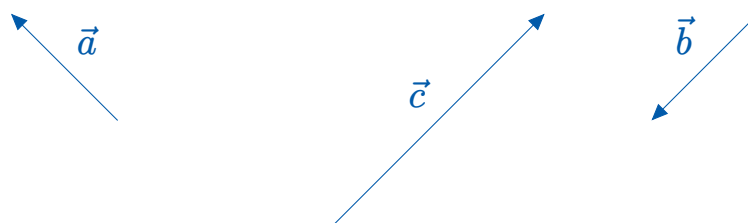
Definition 7.1.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. Vi definerer summen $\vec{a} + \vec{b}$ som den vektor man får, når man tegner $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$ og tegner en pil fra begyndelsen af $\vec{a}$ til slutningen af $\vec{b}$.



Øvelse 7.1.2

Betragt vektorerne



Tegn vektorerne

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} + \vec{c}$

c) $\vec{b} + \vec{c}$

Har man en vektor, kan man danne en ny vektor ved at putte et minus på. Mere præcist har vi:

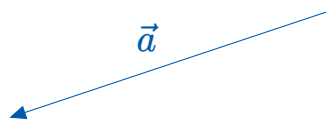
Definition 7.1.3

Lad $\vec{a}$ være en vektor. Vi definerer $-\vec{a}$ som den vektor, der har samme længde men modsat retning som $\vec{a}$



Øvelse 7.1.3

Her er en vektor:



a) Tegn $-\vec{a}$.

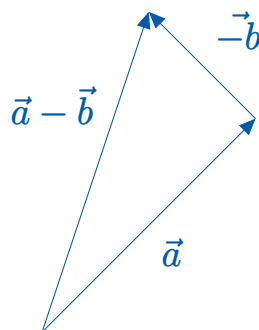
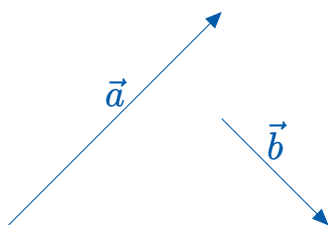
Nu hvor vi har fået defineret, hvad $-\vec{a}$ betyder, er der en oplagt måde at definere subtraktion:

Definition 7.1.4

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. Vi definerer $\vec{a} - \vec{b}$ ved

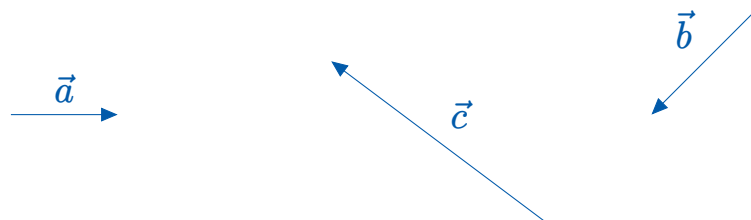
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

.



Øvelse 7.1.4

Betragt vektorerne



Tegn vektorerne

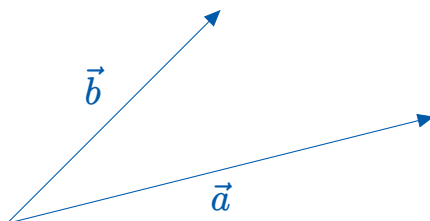
a) $\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{b} - \vec{a}$

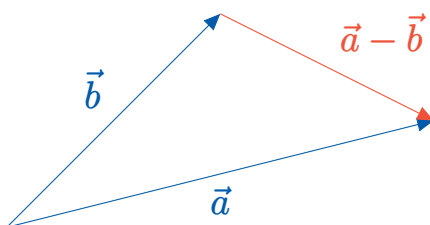
c) $\vec{b} - \vec{c}$

Øvelse 7.1.5

Betragt vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$:



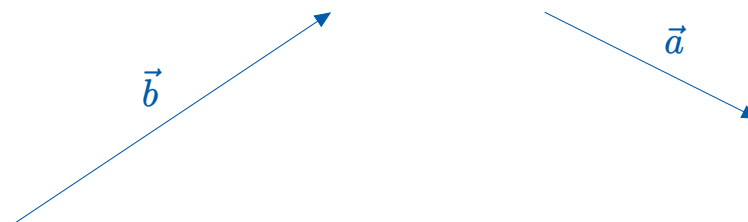
Man kan argumentere for at $\vec{a} - \vec{b}$ går fra spidsen af $\vec{b}$ til spidsen af $\vec{a}$ som vist her:



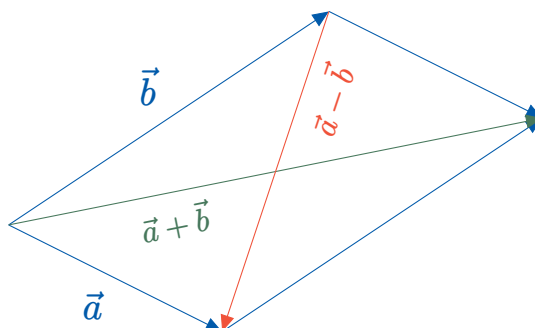
- a) Forklar hvorfor $\vec{a} - \vec{b}$ går fra spidsen af $\vec{b}$ til spidsen af $\vec{a}$

Øvelse 7.1.6

Nogle bøger definere sum og differens af to vektorer lidt anderledes. Givet to vektorer



så defineres $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$ som diagonalerne i det parallelogram som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som vist her:

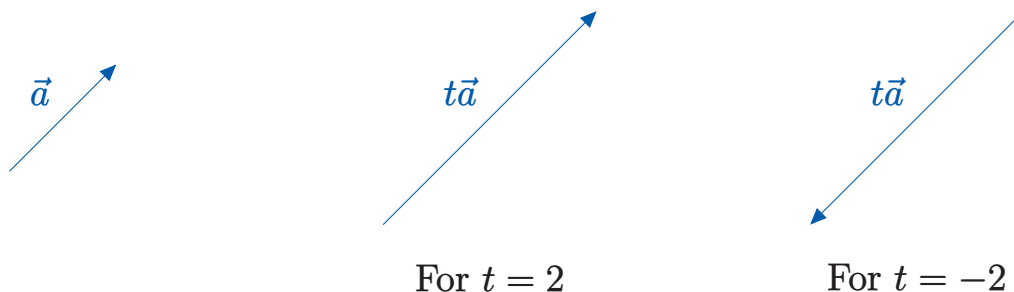


- a) Gør rede for at denne definition giver samme vektor som definitionen fra her på mathhx.

Det var plus og minus, så mangler vi bare gange og dividere, right? Nej man kan ikke gange eller dividere to vektorer. Men man kan gange en vektor med et tal.

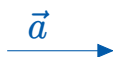
Definition 7.1.5

Lad $\vec{a}$ være en vektor og t være et tal. Vi definerer $t\vec{a}$ som den vektor som har samme retning men er t gange så lang som $\vec{a}$. Er t negativ, så er $t\vec{a}$ modsat rettet $\vec{a}$.



Øvelse 7.1.7

Her er en vektor:



a) Tegn vektoren $-3 \cdot \vec{a}$

Vi har brug for nogle regneregler for at gøre det nemmere at regne mere komplicerede udtryk.

Sætning 7.1.1

Der gælder følgende regnregler for vektorer

$$1. \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$2. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$3. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$4. \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$5. s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$$

$$6. 1\vec{a} = \vec{a}$$

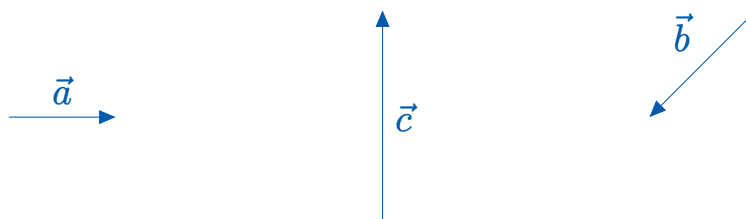
$$7. t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$$

$$8. (s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$$

Regnereglerne afspejler dem som vi kender for de reelle tal, og vi bruger sætningen til at sikre os at vi kan regne med vektorer som om de var tal – altså lige bortset fra at der ikke findes multiplikation/division mellem vektorer.

Øvelse 7.1.8

Betragt vektorerne



Reducer og tegn følgende vektorer

$$a) \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{a} - \vec{a} - 3\vec{a}$$

$$\text{b) } \vec{v} = \vec{b} + \vec{a} - 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{0} + \vec{a}$$

$$\text{c) } \vec{w} = \vec{a} + 2(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c}$$

Øvelse 7.1.9

Forklar følgende begreber:

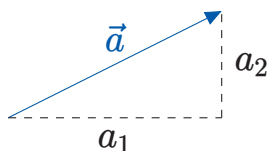
- a) Vektor
- b) Nulvektor
- c) Egentlig vektor
- d) Repræsentant for en vektor.

7.2 Koordinater for vektorer (2017-ordning)

Indtil videre har der været en masse tegning og ikke så meget regning. Det skal der laves om på. Men skal vi regne med vektorer er vi nødt til at beskrive dem på en måde så man kan regne på dem. Det gør vi med koordinater.

Definition 7.2.1

En vektor $\vec{a}$ tildeles koordinater som vist på tegningen:

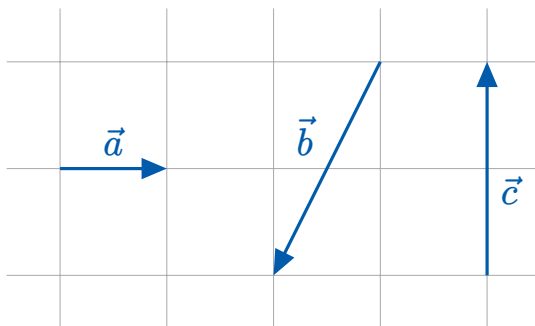


På tegningen er a_1 og a_2 positive. De kan også være negative, så går vi bare i den modsatte retning.

Vi skriver $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Eksempel 7.2.1

Betragt vektorerne



Vi aflæser at

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Øvelse 7.2.1

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Tegn vektorerne.

Regning med koordinater fungerer helt som forventet:

Sætning 7.2.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Så er

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad t\vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Øvelse 7.2.2

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Regn:

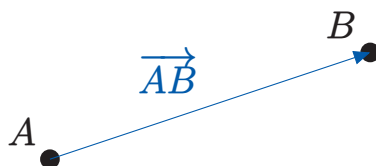
a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} - \vec{b}$

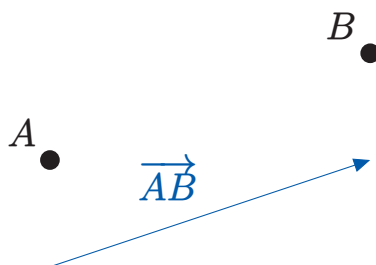
c) $2 \cdot \vec{a}$

Vektorer mellem punkter

Har vi to punkter A og B kan vi danne den vektor som går fra det ene punkt til det andet



Selvom vi omtaler $\vec{AB}$ som vektoren fra A til B , så husker vi, at en vektor ikke ligger noget bestemt sted. Vi kan også tegne $\vec{AB}$ som:



Selvom denne pil ikke går fra A til B har den samme længde og retning og derfor er det den samme vektor som før. Vi kan regne koordinater til $\vec{AB}$ med sætningen:

Sætning 7.2.2

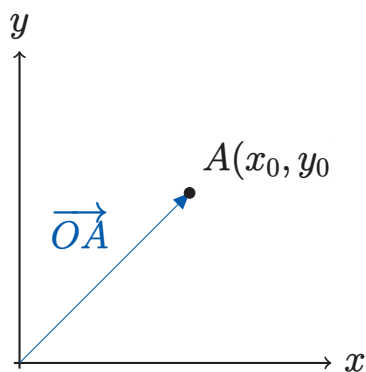
Lad

$$A = (x_1, y_1), \quad \text{og} \quad B = (x_2, y_2)$$

Så er

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Har vi et punkt $A = (x_0, y_0)$, så har vi et særlig navn til vektoren som går fra origo (altså punktet $O = (0, 0)$) til A . Den hedder *stedvektoren* til A og betegnes $\vec{OA}$.



Ikke overraskende har stedvektoren til A samme koordinater som punktet A . Det kan vi tjekke med sætning 7.2.2:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_0 - 0 \\ y_0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Øvelse 7.2.3

Lad $A = (2, -1)$ og $B = (3, 1)$. Bestem

- a) $\overrightarrow{AB}$
- b) $\overrightarrow{BA}$
- c) Stedvektoren til A

Længden af en vektor

Længden af en vektor $\vec{a}$ betegnes med $|\vec{a}|$.

Sætning 7.2.3

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ være en vektor. Så er længden af $\vec{a}$ givet ved:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Øvelse 7.2.4

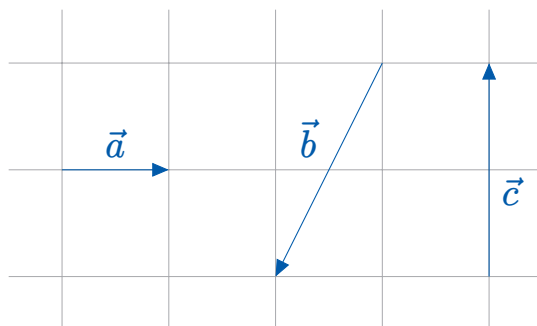
a) Bestem $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right|$

Øvelse 7.2.5

a) Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Bestem a_2 så $|\vec{a}| = 13$

Øvelse 7.2.6

Betragt vektorerne:



- a) Bestem længden af $\vec{a}$.
b) Bestem længden af $\vec{b}$.

- c) Bestem længden af $\vec{c}$.

7.3 Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer (2017-ordning)

Man kan regne med vektorer som om det var tal – lige bortset fra at man ikke kan gange eller dividere to vektorer. I dette afsnit skal vi se på en operation mellem vektorer som minder lidt om at gange, men så alligevel ikke.

Definition 7.3.1

Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Så er *skalarproduktet* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ læses ”vektor a **prik** vektor b”. Så ikke noget med gange. Prik. Man har det med at komme til at sige gange. Så prik. Ikke gange. Prik. Vi bemærker at skalarproduktet er et tal – ikke en vektor. Skalarproduktet kaldes også *prikproduktet*.

Øvelse 7.3.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Regn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Øvelse 7.3.2

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Bestem a_1 så $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Der gælder følgende regneregler for skalarproduktet.

Sætning 7.3.1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være tre vektorer og lad $t \in \mathbb{R}$. Så gælder:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Øvelse 7.3.3

Reducer:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a}$
- b) $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a})$
- c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - |\vec{a}|^2$

Øvelse 7.3.4 (✎)

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

- a) Bevis påstanden (brug regnereglerne, som du brugte i sidste

| øvelse også).

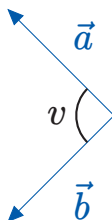
Så, skalarproduktet mellem to vektorer er altså et tal. Men hvad fortæller det tal så om de to vektorer? Fortolkningen af skalarproduktet har noget at gøre med *vinklen mellem de to vektorer*.

Vinklen mellem to vektorer

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$:



Så er vinklen mellem dem den vinkel man får, når man sætter de to vektorer så de har samme begyndelsespunkt som her:



Vinklen mellem to vektorer er den vinkel som ligger mellem 0° og 180° . Så det er ikke ligesom i enhedscirklen hvor man kan gå i begge retninger og snurre flere gange rundt. Når $v = 0$ har vektorerne samme retning og vi siger at de er *ensrettede*. Hvis $v = 90^\circ$ står vektorerne vinkelret på hinanden og vi siger at de er *ortogonale*. Hvis $v = 180^\circ$, så peger vektorerne i modsat retning og vi siger at de er *modsat rettede* (surprise). Hvis vektorerne er enten ensrettede eller modsat rettede siges de også at være *parallelle*.

Øvelse 7.3.5

Tegn to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som er:

- a) ensrettede
- b) ortogonale
- c) modsat rettede
- d) parallelle, men ikke ensrettede.

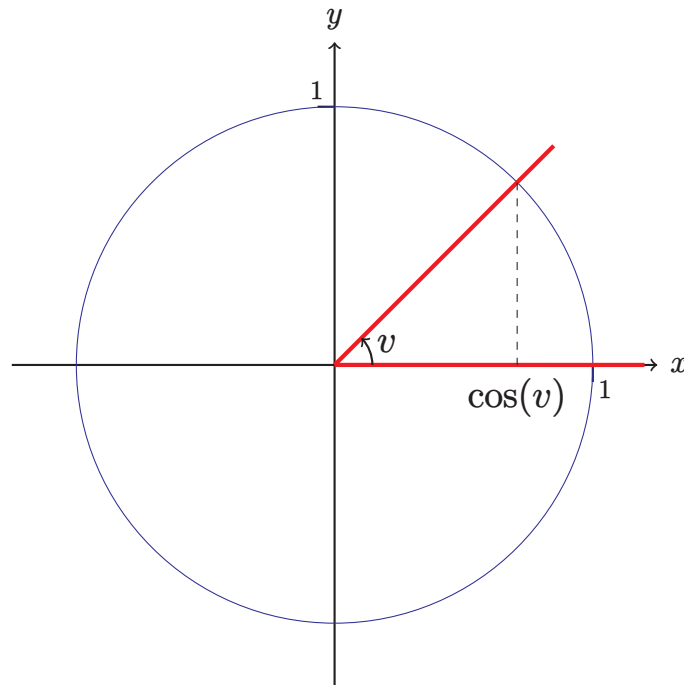
Følgende sætning kan gøre os klogere på, hvad skalarproduktet viser.

Sætning 7.3.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer og lad v være vinklen mellem de to vektorer. Så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$$

Vi graver en enhedscirkel frem så vi kan huske hvordan det er med cosinus:



Lad os se på nogle konkrete situationer. Vi starter med den situation hvor $v = 0$. Det er den når vektorerne er ensrettede. Ud fra enhedscirklen ser vi at $\cos(0^\circ) = 1$. Så

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}||\vec{b}|$$

Så når vi har ensrettede vektorer, så er skalarproduktet altså bare de to vektorers længder ganget sammen. Hvis vi nu lader v vokse, kan vi se på enhedscirklen at $\cos(v)$ bliver mindre. Dvs. skalarproduktet må blive mindre. Når vi kommer på på $v = 90^\circ$ er $\cos(v) = 0$ og derfor bliver

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

Så ortogonale vektorer har et skalarprodukt på 0. Lader vi vinklen komme over 90° kommer $\cos(v)$ under 0 og skalarproduktet begynder dermed at blive negativt og jo større v bliver jo mindre bliver skalarproduktet. Når vinklen når helt op på 180° er vektorerne modsat

rettede og skalarproduktet bliver:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot (-1) = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

Så skalarproduktet er altså produktet af længderne ganget med en faktor som udtrykker i hvilken grad de to vektorer peger i samme retning. Denne faktor er 1 når de har samme retning, -1 når de er modsat rettede og ellers et sted imellem.

Øvelse 7.3.6

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som opfylder at $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ og vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 60° .

- a) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Øvelse 7.3.7

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som opfylder at $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

- a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Øvelse 7.3.8

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

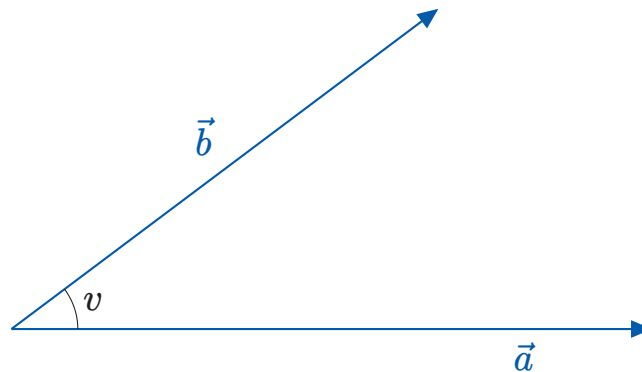
- a) Bestem vinklen mellem vektorerne

VINK: Start med regn længderne og skalarproduktet inden du tænker på vinklen.

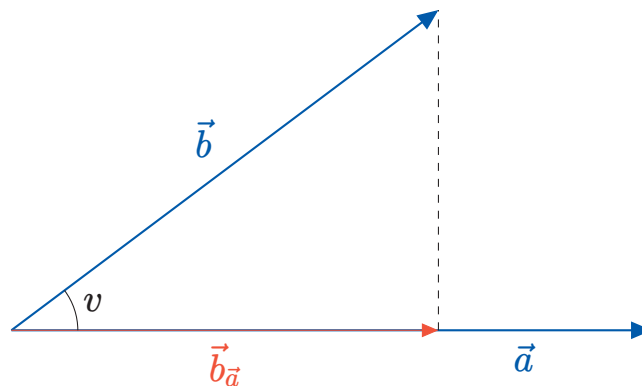
Ekstra

I dette afsnit vil vi se på hvordan vi kan blive endnu mere præcise i vores forklaring af betydningen af skalarproduktet.

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor vinklen mellem dem er under 90° :



Vi indtegner nu en vektor $\vec{b}_a$ kaldet *vektor b's projektion på vektor a* ved at gå fra $\vec{b}$'s slutpunkt til vinkelret ned på $\vec{a}$ som vist her:



Vi vil nu vise at skalarproduktet er givet ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_a|$$

På tegningen kan vi se en trekant med siderne $\vec{b}$, $\vec{b}_{\vec{a}}$ og den stiplede linje. Vi husker fra folkeskolen at

$$\cos(v) = \frac{|\vec{b}_{\vec{a}}|}{|\vec{b}|}$$

Ganger vi med $|\vec{b}|$ på begge sider får vi:

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{b}| \cos(v)$$

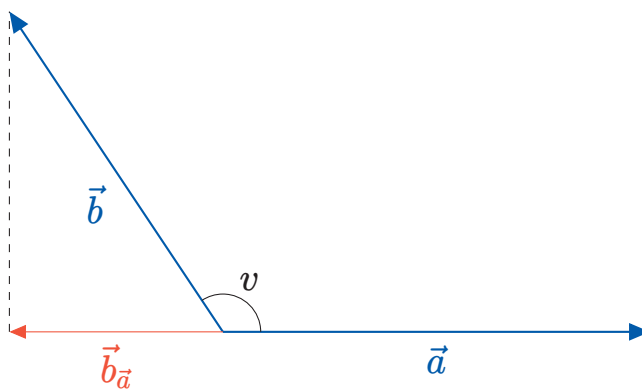
Vi bruger nu sætning sætning 7.3.2 og får

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v) = |\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}|$$

Altså

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}|$$

Så hvis $v < 90^\circ$ er skalarproduktet altså længden af den første vektor ganget med længden af den andens vektors projektion på den første. Når $v > 90^\circ$ ser projektionen således ud:



Ved at tilpasse ovenstående argumenter kan man vise at der i dette tilfælde gælder:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}|.$$

Så her er skalarproduktet altså **minus** længden af den første vektor gange længden af den andens vektors projektion på den først.

Øvelse 7.3.9 (✚)

- a) Vis at hvis $v > 90^\circ$, så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_a|.$$

VINK: Du får brug for formelen $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$ (hvorfor er den rigtigt?)

Øvelse 7.3.10

Tegn vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Regn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ud fra formelen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_a|$ og din tegning ,

Øvelse 7.3.11

Tegn vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Kom med et ca. bud på skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved hjælp af aflæsning på din tegning og formelen $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_a|$.

7.4 Tværvektor og arealer (2017-ordning)

Definition 7.4.1

For en vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

defineres dens *tværvektor* $\hat{\vec{a}}$ ved

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Vektoren $\hat{\vec{a}}$ læses *vektor a hat* eller *tværvektor a*

Øvelse 7.4.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem $\hat{\vec{a}}$

Øvelse 7.4.2

a) Bevis at $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.

VINK: Lad

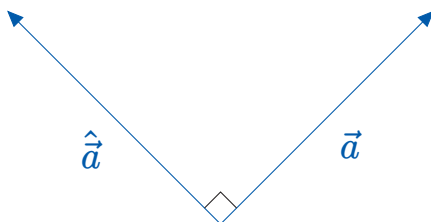
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

og regn $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a}$ og $-\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$ og tjek at det giver det samme.

Betydningen af tværvektoren fremgår af følgende sætning

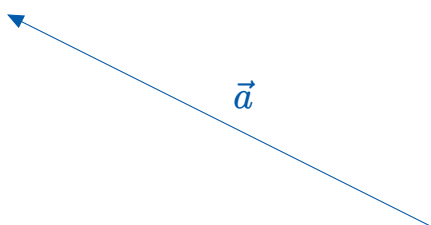
Sætning 7.4.1

For en egentlig vektor $\vec{a}$ fremkommer $\hat{\vec{a}}$ ved at rotere $\vec{a}$ med 90° mod uret.



Øvelse 7.4.3

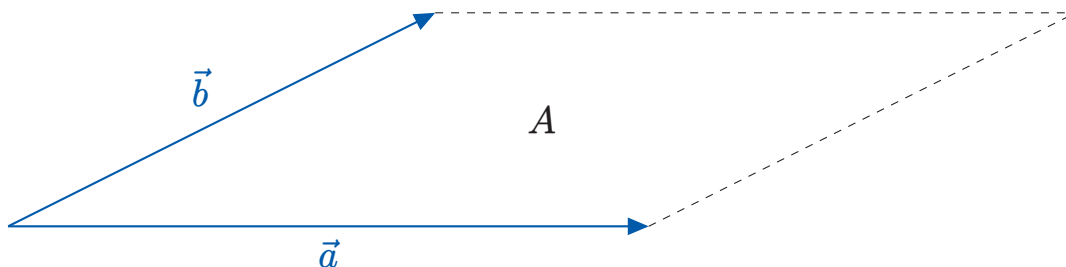
Betragt vektoren



- a) Brug sætning 7.4.1 til at tegne $\hat{\vec{a}}$.

Areal af parallelogram udspændt af to vektorer

Vi skal nu se hvordan man kan bestemme arealet A af det parallelogram som udspændes af to vektorer:



Sætning 7.4.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da er arealet A af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

.

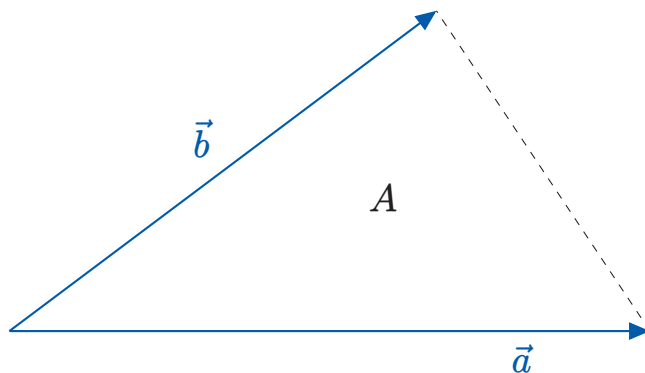
Øvelse 7.4.4

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Bestem arealet A af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Man kan også snakke om arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Det er altså arealet A :



Sætning 7.4.3

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da er arealet A af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$A = \frac{1}{2} |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Øvelse 7.4.5

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Bestem A arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Øvelse 7.4.6

- a) Bevis sætning 7.4.3 ud fra sætning 7.4.2.

7.5 Beviser - Vektorer (2017-ordning)

Sætning 7.3.1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være tre vektorer og lad $t \in \mathbb{R}$. Så gælder:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Bevis

Vi får brug for at regne på vektorernes koordinater så lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Vi beviser den første regel, nemlig at $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Vi beviser reglen ved at regne hver side af lighedstegnet for sig, og så sammenligne resultaterne.

Vestre side først:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Så højre side

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2$$

Vi kan se at de to sider er ens. Se nedenstående øvelse for resten af beviset.

I de følgende øvelser skal du bevise resten af sætning 7.3.1. Du kan bruge samme fremgangsmåde som i beviset for den 1. regneregel.

Øvelse 7.5.1

- a) Bevis den 2. regneregel i sætning 7.3.1.

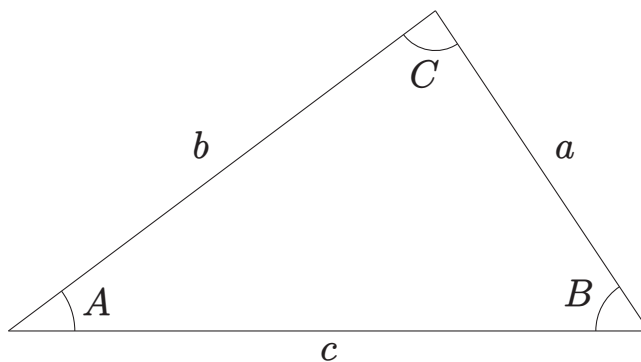
Øvelse 7.5.2

- a) Bevis den 3. regneregel i sætning 7.3.1.

Øvelse 7.5.3

- a) Bevis den 4. regneregel i sætning 7.3.1.

I det næste bevis skal vi bruge en resultat for trekanter kaldet *cosinusrelationerne*. Hvis vi har en vilkårlig trekant:



så gælder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Det hedder cosinusrelationerne, fordi vi kan skrive tilsvarende ligninger op for de andre sider. Vi vil ikke bevise cosinusrelationerne, så vi må håbe de er rigtige.

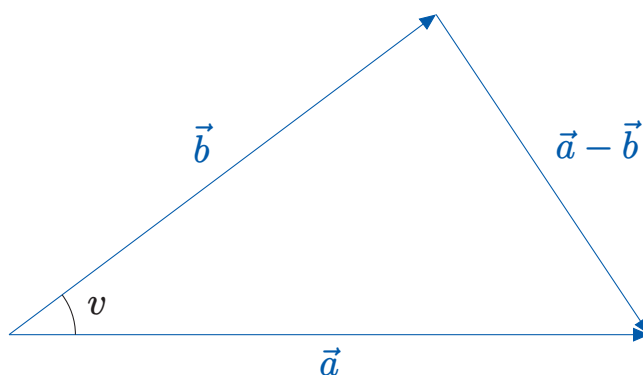
Sætning 7.3.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer og lad v være vinklen mellem de to vektorer. Så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$$

Bevis

Vi starter med at tegne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$:



Vi regner nu $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ med to metoder.

Første metode: Vi bruger regnereglen: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Anden metode: Vi bruger cosinusrelationerne:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

De to røde resultater fra de to metoder er begge lig med $|\vec{a} - \vec{b}|^2$, derfor må de være ens:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Vi trækker $|\vec{a}|^2$ og $|\vec{b}|^2$ fra på begge sider

$$-2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

og dividerer med -2 på begge sider

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

og det var det vi ville vise.

Sætning 7.4.2

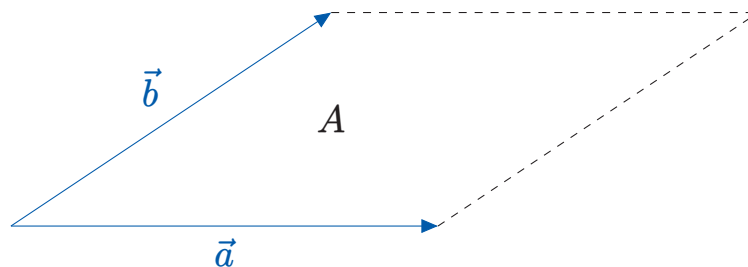
Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da er arealet A af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

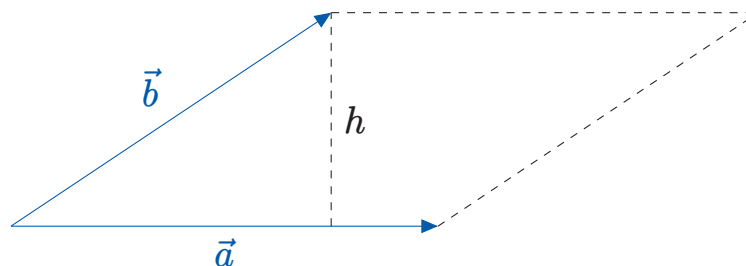
.

Bevis

Vi skal bestemme arealet A her:



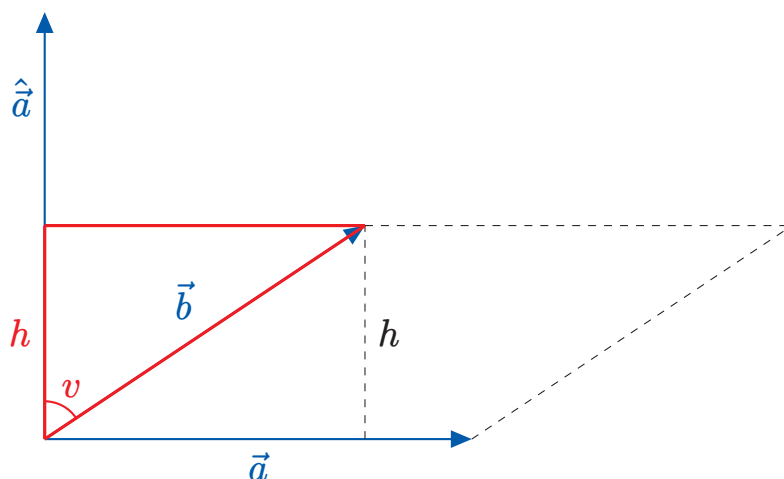
Arealet af et parallelogram er givet ved grundlinje gange med højde. Vi indtegner derfor højden h på tegningen:



Som skrevet, arealet er givet ved grundlinje gange højde. Grundlinjen må være $|\vec{a}|$ så

$$A = |\vec{a}| \cdot h$$

Vi vil nu finde et udtryk for højden. Til det formål indtegner vi et vandretlinjestykke fra øverste venstre hjørne af parallelogrammet ind til tværvektoren. Vi får så en trekant som jeg har markeret med rød. Vi tegner også $\hat{a}$ og vinklen mellem $\hat{a}$ og $\vec{b}$.



Højden h kan vi bestemme med lidt folkeskolematematik. Vi husker, at i en retvinklet trekant, er cosinus til en vinkel lig med hosliggende

katete delt med hypotenusen, så

$$\cos(v) = \frac{h}{|\vec{b}|}$$

og der med er

$$h = |\vec{b}| \cdot \cos(v).$$

Vi kan nu indsætte dette udtryk for højden i formlen for arealet

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

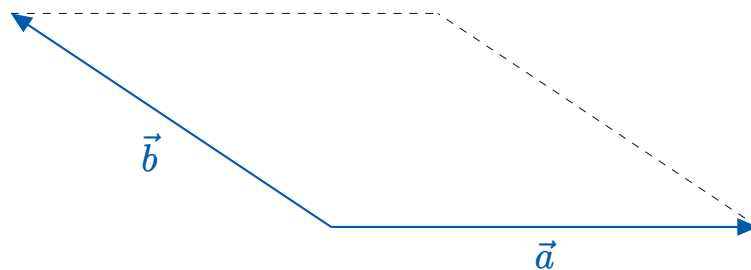
Det ligner jo fuldstændigt et skalarprodukt, men det er det ikke. Vinklen v er nemlig ikke vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Vi udskifter nu $|\vec{a}|$ med $|\hat{\vec{a}}|$. Det kan vi da vi ved at $\hat{\vec{a}}$ fremkommer ved en rotation af $\vec{a}$ og derfor må de to vektorer være lige lange.

$$A = |\hat{\vec{a}}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

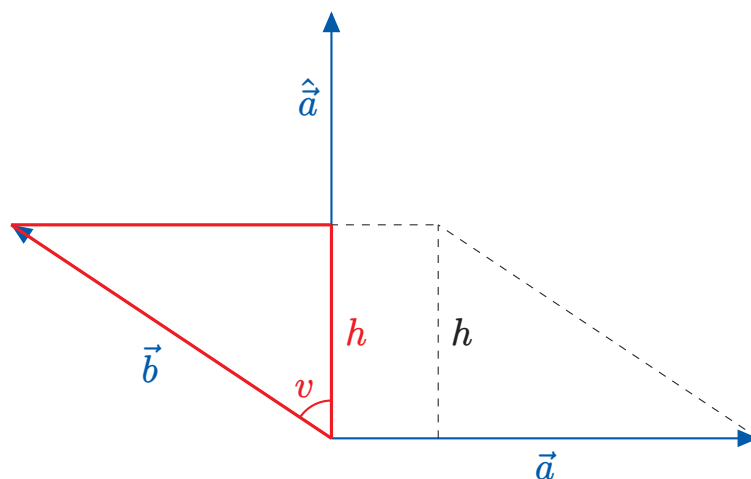
Nu kan vi omskrive det til et skalarprodukt. Vinklen v er nemlig vinklen mellem $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$, så vi kan bruge sætning 7.3.2:

$$A = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$$

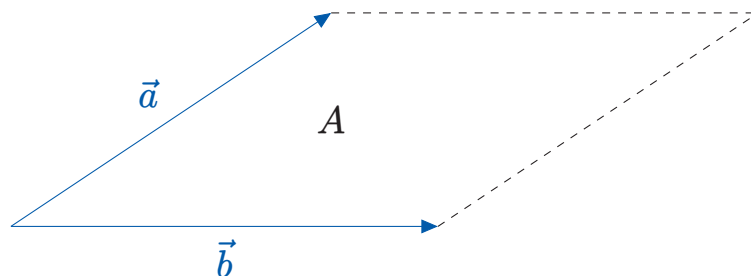
Vi skulle egentligt vise at $A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$, men ud fra vores bevis kunne det godt se ud som om, det ikke er nødvendigt at tage den numeriske værdi. Det er lidt en snyder. Problemet er, at vi er kommet til at antage noget om vektorernes placering da vi lavede vores tegning. Vi kan se at vores tegning kun kan lade sig gøre, når vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ligger mellem 0 og 90°. Så lad os se hvad der sker når vinklen er større end 90°:



Vi laver nu den tilsvarende konstruktion:



Det viser sig at vi kan opskrive præcis de samme ligninger som før (tjek det). Så også her er $A = \hat{a} \cdot \vec{b}$. Vi har nu dækket alle muligheder for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, men ud over vinklen er der også noget andet som ville give problemer med tegningen. Hvad hvis nu at der var byttet rund på $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som her:



Vi kan være snedige at bruge det vi allerede har vist, bare hvor vi har byttet rundt på $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Altså $A = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{a}$. Man kan vise (se øvelse 7.4.2) at $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$, så i alt giver det:

$$A = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$$

Så alt efter vektorernes relative placering har vi altså

$$A = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} \quad \text{eller} \quad A = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$$

Vi tager nu den numeriske værdi på begge sider i de to ligninger

$$|A| = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}| \quad \text{eller} \quad |A| = |-\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Da A er et areal er det et positivt tal, så $|A| = A$. Vi får altså

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}| \quad \text{eller} \quad A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Men det er jo bare det samme som at sige:

$$A = |\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}|$$

Kapitel 8

Trigonometriske funktioner

Dette kapitel er for elever på 2024-ordningen. Dvs. elever startet i 2024 eller senere. Er du på den gamle ordning skal du i stedet læse [dette kapitel](#).

INDHOLD PÅ VEJ

Kapitel 9

Potensfunktioner (S)

Potensfunktioner er den sidste grundlæggende funktionstype vi skal igennem. Vi har dog allerede set på en del potensfunktioner, fordi visse lineære funktioner, polynomier osv. er også potensfunktioner.

9.1 Forskrift og graf

Definition 9.1.1

En potensfunktion er en funktion med forskriften

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor $b > 0$ og $x > 0$.

Bemærk at der ud over at være et krav til b også er et krav til x . Det er første gang vi ser det i en definition af en funktionstype.

Øvelse 9.1.1

Man kunne godt komme til at forveksle forskriften for en potensfunktion med forskriften for en eksponentiel funktion.

a) Hvad er forskellen?

Eksempel 9.1.1

En funktion med forskriften... lad os sige... $f(x) = 2 \cdot x^4$ er selvfølgelig en potensfunktion, men nogle gange er det knap så tydeligt, at man har med en potensfunktion at gøre. Her ses nogle mindre oplagte eksempler:

- $f(x) = \sqrt{x}$ er en potensfunktion da $\sqrt{x} = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ er en potensfunktion da $\frac{1}{x} = 1 \cdot x^{-1}$

I eksemplet ser vi at $f(x) = \sqrt{x}$ og $f(x) = \frac{1}{x}$ begge er eksempler på potensfunktionsfunktioner. Man kan ikke tage kvadratroden af et negativt tal, og man kan ikke dele med nul, og det er grunden til, at vi kræver at $x > 0$ i definition 9.1.1. Så er vi nemlig sikre på, at $f(x) = b \cdot x^a$ er defineret uanset, hvad a er. Men mange potensfunktioner kunne defineres for en større mængde af tal. F.eks. funktionen $f(x) = x^2$. Opfatter vi denne funktion som et andengradspolynomium, er den pludselig defineret for alle reelle tal. Medmindre man specifikt angiver, at funktionen skal opfattes som en potensfunktion, så er definitionsmængden altid den størst mulige. I dette kapitel er det implicit at alle funktionerne skal opfattes som potensfunktioner.

Øvelse 9.1.2

Afgør hvilke af følgende funktioner der er potensfunktioner og bestem a og b :

a) $f(x) = 2 \cdot x^5$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = 7 \cdot 2^x$

d) $f(x) = x$

e) $f(x) = -x$

f) $f(x) = 2x^3 + 1$

g) $f(x) = 4$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

i) $f(x) = \frac{7}{x^4}$

Øvelse 9.1.3

Af sidste øvelsen fremgår det at der er mange velkendte funktioner som også kan opfattes som potensfunktioner, hvis definitionsmængden begrænses til $]0; \infty[$.

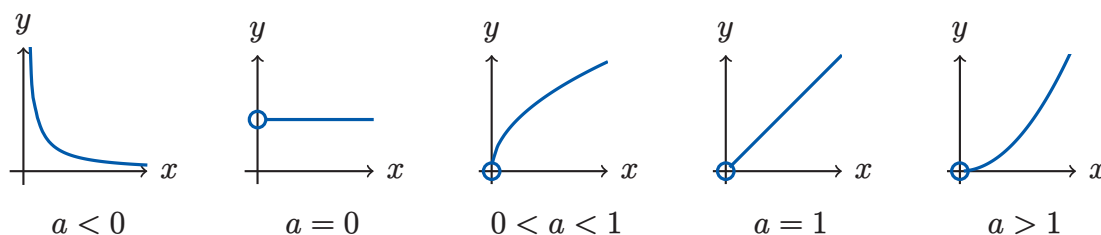
- a) Hvilke lineære funktioner kan opfattes som potensfunktioner?
- b) Hvilke polynomier kan opfattes som potensfunktioner?
- c) Hvilke konstante funktioner kan opfattes som potensfunktioner.

Graf

For potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ er grafens form er bestemt af konstanterne a og b . Her er det især a som er spændende at se på, da det er den som bestemmer, hvilken type graf der er tale om.

Betydning af a

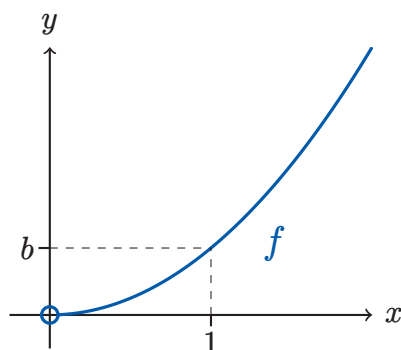
Det er a som bestemmer potensfunktions vækst. Alt efter værdien af a får vi forskellig form på grafen for funktionen:



Figur 9.1: Grafen for potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ for forskellige værdier af konstanten a

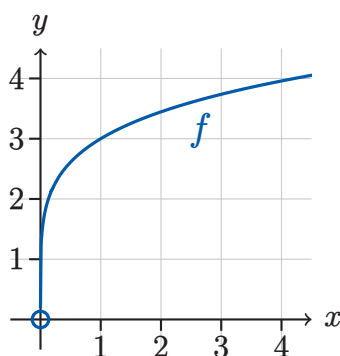
Betydning af b

Konstanten b har selvfølgelig også en betydning for grafen. Det er nemlig andenkoordinaten til punktet med førstekoordinat 1, som vist her:



Øvelse 9.1.4

Her ses grafen for en potensfunktion.



- Hvad kan man sige om a ?
- Aflæs værdien af b .

Øvelse 9.1.5

Definitions og værdimængden for potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ afhænger af konstanterne a og b .

Ud fra graferne i figur 9.1 skal du bestemme definitions og værdimængden for f når

a) $a \neq 0$

b) $a = 0$

Øvelse 9.1.6

Potensfunktioner som f.eks. $f(x) = 3x$ og $f(x) = x^2$ er ikke så interessante da vi har studeret dem i de foregående kapitler. Så lad os se nærmere på nogle af de mere eksotiske potensfunktioner.

a) Lav en skitse af $f(x) = \sqrt{x}$. Hvis du er sej, gør du det i hånden uden GeoGebra.

b) Lav en skitse af $f(x) = \frac{1}{x}$. Hvis du er sej, gør du det i hånden uden GeoGebra.

Ligninger med potenser

I forbindelse med potensfunktioner optræder også ligninger med potenser.

Eksempel 9.1.2

Vi vil løse ligningen $5x^{3,5} = 30$. Vi starter med at dividere med 5 på begge sider, da det vil bringe os lidt tættere på at få x til at stå alene:

$$x^{3,5} = \frac{30}{5}$$

Dvs.

$$x^{3,5} = 6$$

Nu tager vi den 3,5'te rod af 6 for at finde x :

$$x = \sqrt[3,5]{6}$$

Vi taster roden i GeoGebra. Man kan få rodtegnet frem ved at skrive

nroot i et algebravindue.

$$x = 1,67$$

Øvelse 9.1.7

Løs ligningerne

a) $3x^{1,7} = 20$

b) $0,23 = x^{-1}$

Ekstra

Ligesom for lineære og eksponentielle funktioner, er der også en formel for forskriften for en potensfunktion gennem to punkter.

Sætning 9.1.1

Antag at grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) . Da kan a og b bestemmes ved formlerne:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_0}{x_0^a}$$

Øvelse 9.1.8

- a) Bestem forskriften for den potensfunktion som går igennem punkterne $(2, 12)$ og $(3, 27)$.

Øvelse 9.1.9

Nedenstående tabel viser sammenhæng mellem kropsvægt og hjernevægt for to mennesker.

Kropsvægt (kg)	60	80
Hjernevægt (kg)	1,268	1,533

Sammenhængen kan beskrives med en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$, hvor $f(x)$ er hjernevægten og x er kropsvægten.

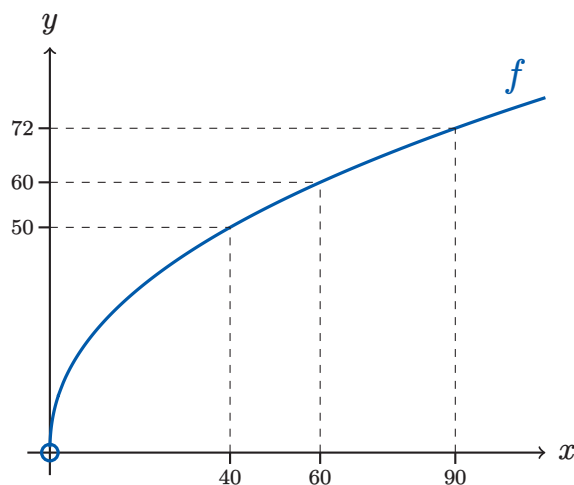
- Bestem a og b i forskriften.
- Bestem hjernevægten for en person der vejer 110 kg. Kan du gøre det både ved aflæsning og ved beregning?
- En mand har en hjerne på 1,4 kg. Hvad vejer han? Kan du finde ud af det både ved aflæsning og ved beregning?

9.2 Potensfunktioners vækst

Indtil videre har vi set på følgende former for vækst:

Lineær	y vokser med en fast værdi, når x vokser med en fast værdi
Eksponentiel	y vokser med en fast procent, når x vokser med en fast værdi

Potensfunktioner vokser med en fast procent, når x vokser med en fast procent. Altså en procent-procent vækst. Det er nemmest at illustrere med et eksempel:



Vi har valgt at markere $x = 40$ og lade x vokse med 50%. Vi ser at de tilsvarende y -værdier vokser med 20%. Den procentvise vækst i y afhænger ikke af det valgte udgangspunkt for x , men den afhænger af det valgte procentvise spring i x -værdierne.

Øvelse 9.2.1

Med udgangspunkt i grafen ovenover.

- a) Tjek at jeg har ret. Altså der er et spring på 50% mellem de markerede x -værdier og et spring på 20% mellem de markerede y -værdier.
- b) Hvad ville der ske hvis jeg havde valgt en anden start værdi til x , men samme procentvise vækst. Ville y så stadig vokse med 20%?
- c) Hvad ville der ske hvis jeg havde valgt en anden procentvis vækst til x , men samme startværdi. Ville y så stadig vokse med 20%?

Vi kan udvide nu skemaet med vækstegenskaber:

Lineær	y vokser med en fast værdi, når x vokser med en fast værdi
Eksponentiel	y vokser med en fast procent, når x vokser med en fast værdi
Potens	y vokser med en fast procent, når x vokser med en fast procent

Bemærk forskellen mellem eksponentiel og potens.

Øvelse 9.2.2 (♣)

Antag at en potensfunktion $f(x)$ vokser fra 200 til 220 når x vokser fra 30 til 60.

- Hvor stor er den procentvise vækst fra 200 til 220?
- Hvor stor er den procentvise vækst fra 30 til 60?
- Benyt de netop fundne resultater til at bestemme $f(120)$

VINK: I sidste spørgsmål får du brug for at udnytte hvad du ved om potens-vækst fra skemaet oven over

Regression med potensfunktioner

Ligesom vi kan lave lineær og eksponentiel regression kan vi også lave regression med potensfunktioner. Der er ikke noget nyt her, andet end at man selvfølgelig vælger "potens" i Excel.

Øvelse 9.2.3

I [dette](#) Excel-ark ses en oversigt over indtægter for kunstnere på Spotify i år 2021. I arket fremgår det f.eks. at kun 16500 af kunstnerne tjente mere end \$50.000. Og det er beløbet Spotify udbetalte. Kunstneres pladeselskab snupper en stor del, medmindre kunstneren selv udgiver musikken, så reelt er indtjeningen mindre. Jeg kan ikke anbefale at blive musiker.

- a) Bestem en potensmodel for sammenhængen mellem indtægt x og antallet af kunstnere $n(x)$, som har minimum denne indtægt.
- b) Bestem ved hjælp af modellen hvor mange kunstnere som tjente mere end \$2.000.
- c) Bestem ved hjælp af modellen hvor meget de bedst tjenende 1000 kunstnere tjente.

Spotify er ikke det eneste eksempel på, at få mennesker får en stor del af kagen, og I mange tilfælde vil potensfunktioner give en god beskrivelse af uligheden. Heldigvis kan vi også bruge potensfunktioner i fysik, og det er jo mere opmuntrende end ulighed. Så luk mathhx og lav noget fysik. Jaja nu tænker du nok at jeg er sådan en enhedslisten-agtig type, og at man fortjener at tjene alle pengene, hvis man er dygtig osv...men kom ikke og fortæl mig at den musik, som er mest spillet på Spotify, er den bedste!

Ekstra

Vi kan også skrive skemaet med vækstegenskaber således:

	y -vækst: fast værdi	y -vækst: fast procent
x -vækst: fast værdi	Lineær	Eksponentiel
x -vækst: fast procent		Potens

Vi kan se at skemaet indeholder et tomt felt.

Øvelse 9.2.4 (♣)

Du kan faktisk tænke dig til hvad der skal stå i det tomme felt. Det er svært, men du skal have gang i noget med omvendte funktioner kan jeg afsløre.

- a) Gør skemaet færdigt. Dvs. find ud af hvad der skal stå i det tomme felt

9.3 Beviser til potensfunktioner

Vi har lært at b er andenkoordinaten til $x = 1$ og at potensfunktioner er karakteriseret ved en procent-procent vækst. Det kan formuleres mere konkret i følgende sætning:

Sætning 9.3.1

Grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punktet $(1, b)$ og funktionen vokser med $((1 + r)^a - 1) \cdot 100\%$ når x vokser med $r \cdot 100\%$

Vi bemærker at $((1 + r)^a - 1) \cdot 100\%$ ikke afhænger af x så det er en fast procentvis vækst.

Øvelse 9.3.1

Med inspiration fra beviset til den tilsvarende sætning for eksponentielle funktioner (se afsnit 6.6 i b-bogen)

- a) Bevis ovenstående sætning

VINK: Du får brug for potensregnereglen $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

Funktion igennem to punkter

Sætning 9.1.1

Antag at grafen for en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) . Da kan a og b bestemmes ved formlerne:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_0}{x_0^a}$$

Øvelse 9.3.2

I denne øvelse skal du igen søge inspiration i beviset for den tilsvarende sætning for eksponentielle funktioner (se afsnit 6.6 i b-bogen)

a) Bevis ovenstående sætning.

VINK: Du får brug for følgende regler $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ og $\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$.

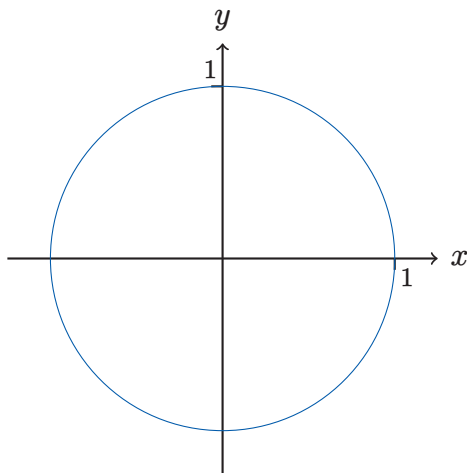
Kapitel 10

Trigonometriske funktioner - udvidet (S)

Måske har du lært om sinus, cosinus og tangens i grundskolen? De tre funktioner er eksempler på trigonometriske funktioner, og dette kapitel omhandler netop disse funktioner. I grundskolen bruger man trigonometriske funktioner til at regne på trekanter, men på HHX er vi mest interesseret i dem, fordi vi kan bruge dem til at beskrive periodiske fænomener. Det kan f.eks. være forbindelse med en virksomhed, som sælger en sæsonbetonet vare. Her kan de trigonometriske funktioner bruges til at modellere, hvordan virksomhedens omsætning følger årets måneder.

10.1 Enhedscirklen

En *enhedscirkel* er en cirkel i et koordinatsystem med centrum i $(0, 0)$ og radius $r = 1$:



Øvelse 10.1.1

- a) Hvad er en enhedscirkel?

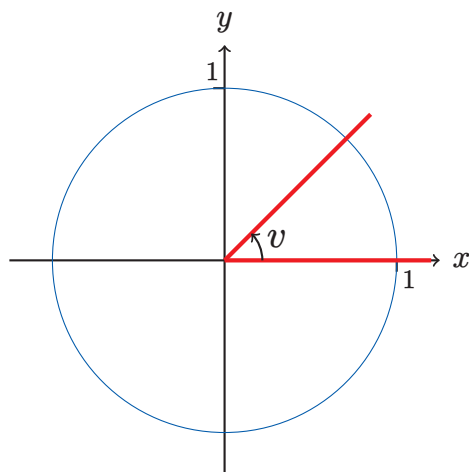
Vi får brug for at kende omkredsen af enhedscirklen. Den er 2π .

Øvelse 10.1.2

- a) Argumenter at omkredsen af enhedscirklen er 2π .

Vinkler i enhedscirklen

Har man en vinkel v , tegner man den ind i enhedscirklen som vist her:



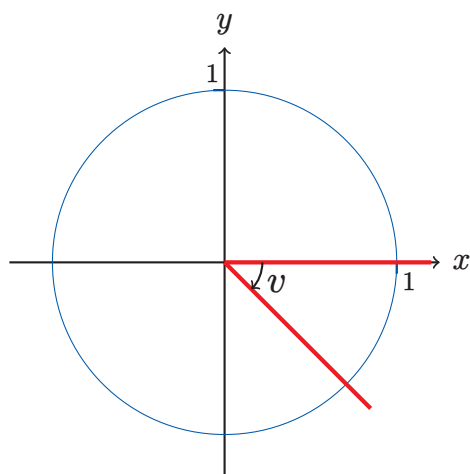
Øvelse 10.1.3

Find papir og blyant frem.

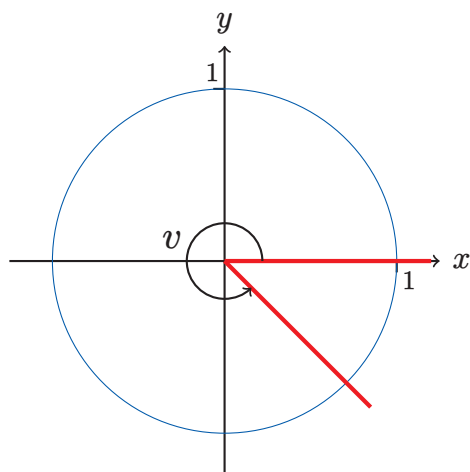
- a) Tegn en enhedscirkel.
- b) Tegn vinklen $v = 135^\circ$ ind i enhedscirklen, og inden du siger: "Jeg har jo ikke nogen vinkelmåler med", så siger jeg: "Det er ikke nødvendigt, du kan godt gøre det præcist nok uden".

Negative vinkler

Vi er vandt til vinkler er positive. Vinkler er jo noget, vi måler med vores vinkelmåler, right? Men man kan faktisk godt have negative vinkler. Har vi en vinkel på $v = -45^\circ$, betyder det at den skal se ud som en vinkel på 45° , men at den skal "rotere den anden vej" i enhedscirklen som vist her:



Man kunne tænke at en vinkel på -45° er det samme som en vinkel på 315° som vist her:



Selvom vinklernes ben ligger samme sted i de to enhedscirkler, kan vi se at den sorte buede pil der markerer rotationen er forskellig for de to vinkler. Spørger man mig, ja så vil jeg hellere roteres med -45° end 315° , da 315° ville gøre mig helt rundtosset (det er et større rotation). De to vinkler har dog en noget til fælles. De skærer enhedscirklen i det samme punkt, og netop skæringspunktet med enhedscirklen kommer

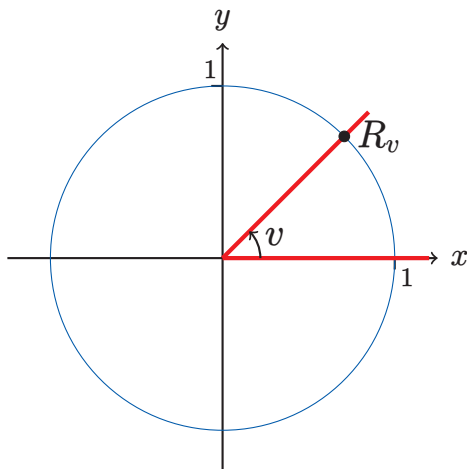
vi til at interessere os for senere.

Øvelse 10.1.4

- a) Tegn vinklen på -180° ind i en enhedscirkel.

Retningspunkter

Når man tegner en vinkel ind i enhedscirklen, ligger man altid vinklens ene ben langs x-aksen. Det punkt hvor vinklens andet ben skærer cirklen kaldes *retningspunktet*. Hedder vinklen v , betegner vi retningspunktet med R_v .



Øvelse 10.1.5

Bestem koordinaterne til retningspunkterne for følgende vinkler.

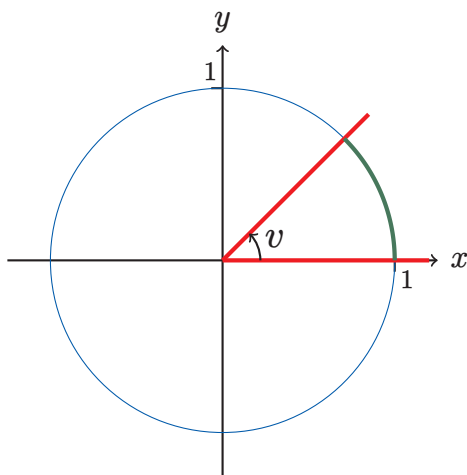
- a) $v = 90^\circ$
- b) $v = 180^\circ$
- c) $v = 270^\circ$

d) $v = 0^\circ$

e) $v = -90^\circ$

Vinkler målt i radianer

I stedet for at måle vinkler i grader, kan man måle dem i noget som hedder *radianer*. Når man måler en vinkel i radianer, måler man længden langs cirkelns periferi (kant) som vist her:



Vinklen v målt i radianer er altså længden af den grønne bue. Størrelsen på en vinkel målt i radianer kaldes radiantallet.

Eksempel 10.1.1

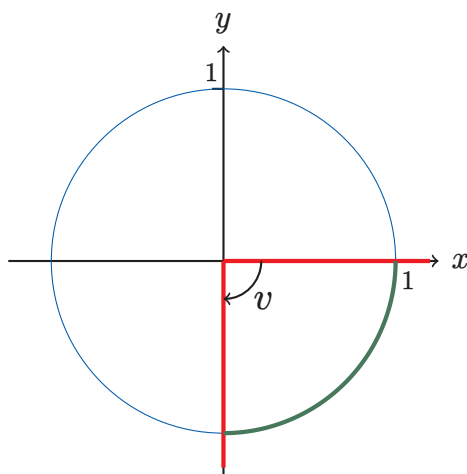
Vi vil nu bestemme radiantallet for vinklen ovenover: Da der er 2π hele vejen rundt, og vi kan se at den grønne bue fylder $\frac{1}{8}$ af cirklen, må vinklen v være $v = \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$. Altså $v = \frac{\pi}{4}$.

Læg mærke til der ikke er nogen enhed på. Det er den måde vi kan se forskel på grader og radianer. Står der $v = 20$, betyder det 20 radianer, mens $v = 20^\circ$ betyder 20 grader.

Vil man finde radiantallet for negative vinkler, fungerer det helt som man skulle tro. Man finder stadig buelængden, men hvis vinklen er negativ, så er radiantallet også negativt.

Eksempel 10.1.2

Vi vil nu bestemme radiantallet for en vinkel på -90° . Vi indtegner først vinklen og derefter indtegner vi buen langs enhedscirklen (igen markeret med grøn):



Da der er 2π hele vejen rundt, og vi kan se at den grønne bue fylder $\frac{1}{4}$ af cirklen, må buelængden være $v = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$. Da v er en negativ vinklen skal der et negativt fortegn på buelængen. Altså $v = -\frac{\pi}{2}$.

Øvelse 10.1.6

Bestem radiantallet for følgende vinkler:

- a) $v = 90^\circ$
- b) $v = 180^\circ$
- c) $v = 0^\circ$

d) $v = -45^\circ$

Øvelse 10.1.7

Bestem koordinaterne til retningspunktet for følgende vinkler. Pas på! Jeg har blandet grader og radianer.

a) $v = 90^\circ$

b) $v = -\pi$

c) $v = 450^\circ$

d) $v = -2$ Her kan du ikke gøre det præcist (endnu). Så et ca. punkt er ok.

Øvelse 10.1.8

a) Udfyld de tomme pladser.

x	0°	45°	90°	135°		225°	270°		
x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π			$\frac{7\pi}{4}$	2π

Øvelse 10.1.9

a) Hvor mange grader går der på en radian?

b) Hvor mange radianer går der på en grad

Øvelse 10.1.10 (✚)

Lad v betegne en vinkel i grader, og lad x betegne den samme vinkel men målt i radianer.

a) Lav en formel der kan omregne fra grader til radianer.

b) Lav en formel der kan omregne fra radianer til grader.

10.2 Cosinus, sinus og tangens

Med enhedscirklen i baglommen er vi nu klar til at indføre de trigonometriske funktioner.

Definition 10.2.1

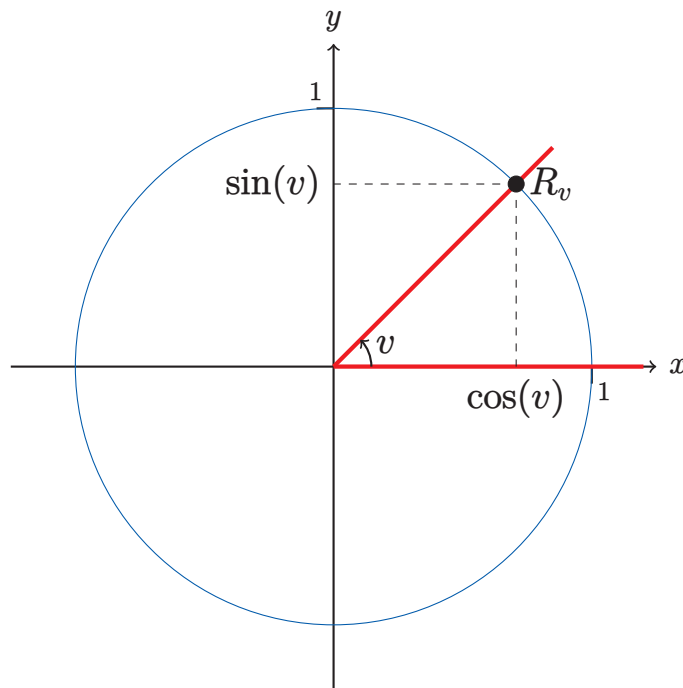
Lad v være en vinkel med retningspunkt R_v .

Cosinus til v defineres som førstekoordinaten til R_v og betegnes $\cos(v)$.

Sinus til v defineres som andenkoordinaten til R_v og betegnes $\sin(v)$.

Tangens til v defineres som forholdet $\frac{\sin(v)}{\cos(v)}$ og betegnes $\tan(v)$. Dette gælder selvfølgelig kun hvis $\cos(v) \neq 0$. Ellers er tangens udefineret.

Cosinus og sinus kan illustreres således:



Eksempel 10.2.1

Vi vil bestemme cosinus, sinus og tangens til vinklen på tegningen oven over. Det er svært at se de præcise koordinater til retningspunktet ud fra tegningen, men det ser ud til at cosinus og sinus har samme værdi og at den værdi ligger mellem $\frac{1}{2}$ og 1. Skal vi sige 0,7? Altså

$$\cos(v) \approx 0,7 \quad \text{og} \quad \sin(v) \approx 0,7$$

Tangens bliver så

$$\tan(v) \approx \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{0,7}{0,7} = 1$$

Man kan bruge en computer til at bestemme de præcise værdier for cosinus, sinus og tangens, men til at starte med, er det fint at aflæse for at få forståelse på plads.

Øvelse 10.2.1

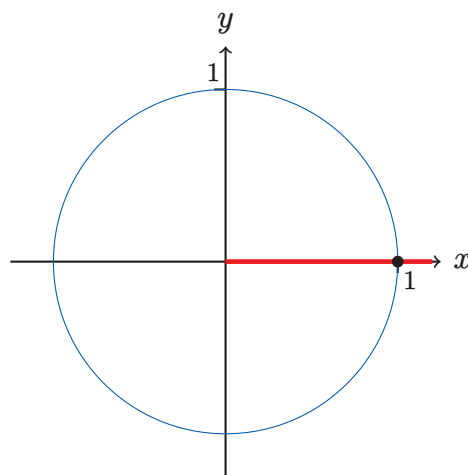
Bestem cosinus, sinus og tangens til følgende vinkler.

- a) $v = \pi$
- b) $v = -2\pi$
- c) $v = 135^\circ$ (bare sådan ca.)
- d) $v = -2$ (bare sådan ca.)
- e) $v = 90^\circ$

Cosinus, sinus og tangens som funktioner

Til enhver vinkel v kan vi bestemme cosinus til v . Vi kan derfor tænke på cosinus som en funktion, nemlig den funktion som til ethvert x

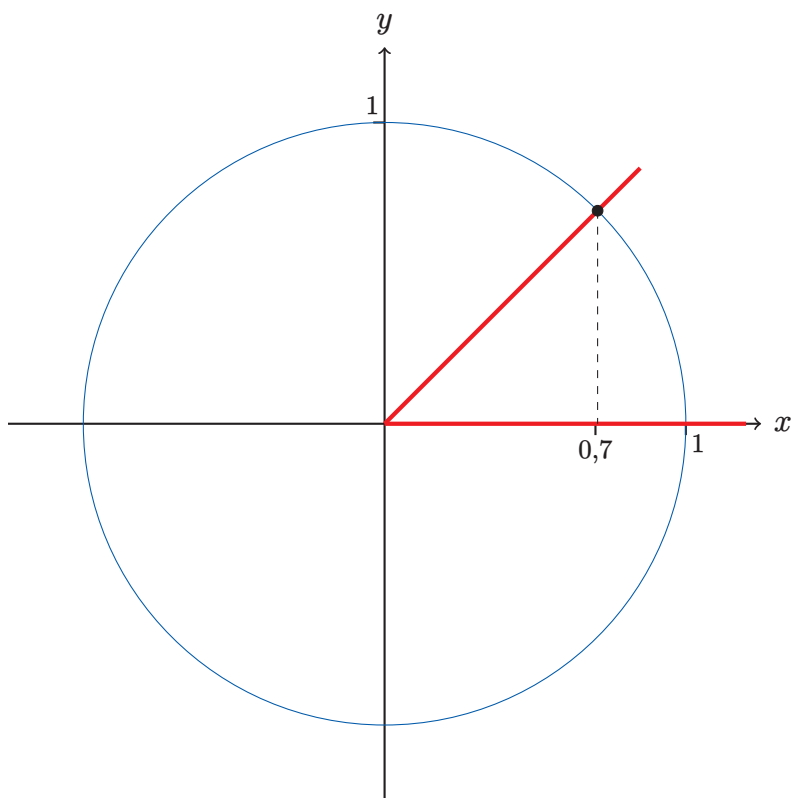
knytter $\cos(x)$, dvs. funktionen med forskriften $f(x) = \cos(x)$. Grunden til vi skriver x i stedet for v er at vi gerne vil tænke på cosinus som en almindelig funktion og her plejer vi at kalde variabelen for x . Lad os undersøge, hvordan grafen ser ud. Vi tegner grafen ved at lave et sildeben. Vi finder funktionsværdierne ud fra enhedscirklen. Vi starter med $x = 0$. Altså en vinkel på 0.



Vi kan se at retningspunktet for vinklen $x = 0$ har en førstekoordinat på 1. Altså er $\cos(0) = 1$ og dermed er $f(0) = 1$ (husk at vi tegner grafen for $f(x) = \cos(x)$). Der er ikke noget nyt her. Det er præcis som den øvelse I lige har regnet. Det skriver vi ind i et sildeben:

x	0
$f(x)$	1

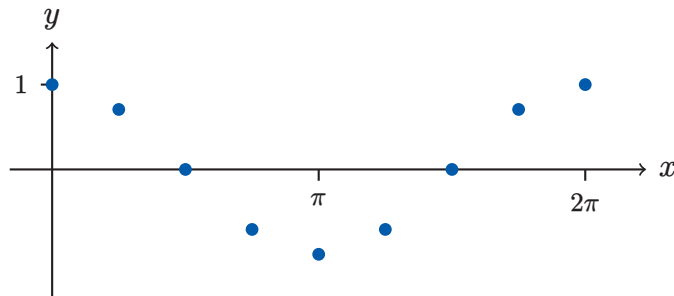
Vi tager lige en til. Vi vælger vinklen på $x = \frac{\pi}{4}$:



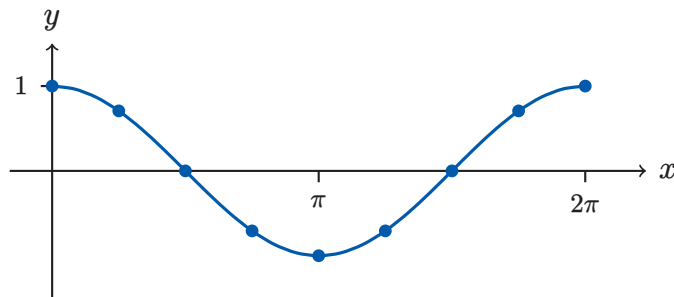
Vi aflæser førstekoordinaten til retningspunkt for vinklen $x = \frac{\pi}{4}$ til at være $x \approx 0,7$, hvilket vi sætter ind i sildebenet. Sådan forsætter vi rundt i enhedscirklen, hvilket giver os:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	0,7	0	-0,7	-1	-0,7	0	0,7	1

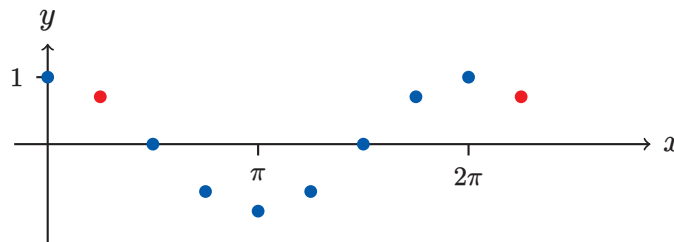
Vi tegner punkterne ind i et koordinatsystem



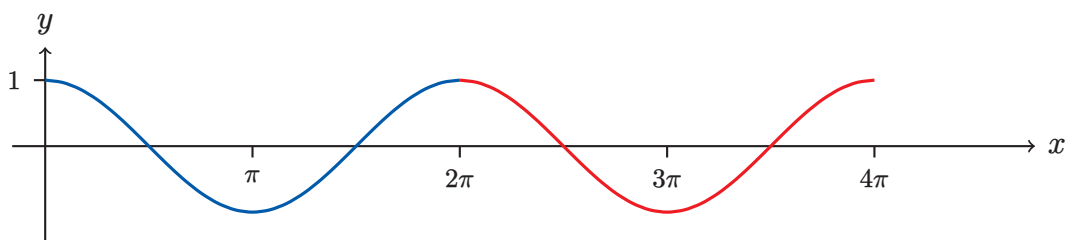
og vi tegner en graf gennem alle punkterne:



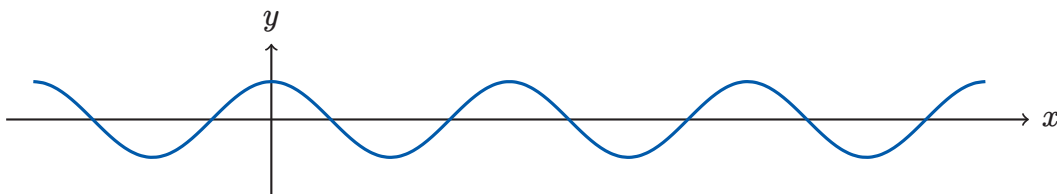
Vi ser at det sidste punkt ligger med samme funktionsværdi (y -værdi) som det første. Det er fordi at vi ved $x = 2\pi$ er nået en helt gang rundt i cirklen og derfor starter vi forfra med de samme funktionsværdier. Tegner vi endnu et punkt ind, ved $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$, får vi:



Vi kan se at dette punkt har samme funktionsværdi som det andet punkt. Sådan kan vi blive ved:



Vi kan se at den røde del af grafen er en nøjagtig kopi af den sorte del. En funktion, som gentager sig selv på den måde, siges at være *periodisk*. Det stykke, man skal gå ud, før at funktion gentager sig selv, kaldes *perioden*. Vi kan se at cosinus er periodisk med periode $T = 2\pi$. Grafen kan selvfølgelig udvides mere – også i negativ retning:



Øvelse 10.2.2

Nu er det din tur til at tegne grafer med papir og blyant som beskrevet ovenover.

- Tegn grafen for sinus i intervallet $[0; 2\pi]$.
- Tegn grafen tangens i intervallet $[0; 2\pi]$. Den her er lidt svær. Du får brug for mange støttepunkter. Det kan være en hjælp at overveje, hvordan grafen må opføre sig, når x er tæt på $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$.

Øvelse 10.2.3

- a) Argumenter for at sinus er periodisk og kom med et bud for perioden. Få hjælp fra din tegning af grafen.
- b) Argumenter for at tangens er periodisk og kom med et bud for perioden. Få hjælp fra din tegning af grafen.

Trigonometriske regneregler

Ligesom der er f.eks. potensregneregler er der regneregler for trigonometriske funktioner. Der er virkelig mange af dem, se bare [her](#). Man kan udtrykke reglerne både for vinkler målt i radianer og grader. Her vil vi holde os til grader. Lad os se på nogle eksempler fra en STX fysikbog:

$$\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$$

Formler som ovenstående kaldes *overgangsformler*. Dem er der en masse af. Her er en anden regneregler fra samme bog:

$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cos(v)$$

Denne regel er et eksempel på en *dobbeltvinkelformel*. Dem er der også flere af. Her er der en overgangsformel som er god at kunne når man skal lave trigonometri:

$$\sin(v) = \sin(180^\circ - v)$$

Det er sjældent I får brug for dem (mens I går på HHX) og derfor er det ikke regler, I behøver at gå og huske.

Øvelse 10.2.4 (♣)

I skal nu prøve at kontrollere at $\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$.

- Tegn en enhedscirkel
- Tegn en vilkårlig vinkel x (men ikke 45°) ind i cirklen. I kan f.eks. vælge 55° .
- Tegn nu $90^\circ - v$ ind i cirklen.
- Marker nu $\cos(90^\circ - v)$ med stiplede linjer og $\sin(v)$ på din tegning.
- Aflæs nu $\cos(90^\circ - v)$ og $\sin(v)$. Er de ens?

Øvelse 10.2.5

Man kan vise at $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ og $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Brug dobbeltvinkelformlen $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cos(x)$ til at regn $\sin(60^\circ)$.

Ekstra

Mere formelt er en *periode* for en funktion f et tal T , forskelligt fra nul, som opfylder:

$$f(x + T) = f(x)$$

for alle $x \in \text{Dm } f$. Det betyder at tallene

$$\dots, 6\pi, -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$$

alle er perioder for sinus og cosinus. Det mindste ikke-negative tal 2π kaldes den *fundamentale periode*. Her på MATHHX mener vi altid "den fundamentale periode", når vi skriver "periode".

10.3 Harmoniske svingninger

Harmoniske svingninger er en grundlæggende funktionstype som man møder ofte i fysik. F.eks. i forbindelse med bølger.

Definition 10.3.1

En *harmonisk svingning* er en funktion på formen

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

hvor:

a er et positivt tal som kaldes amplituden

b er et positivt tal som kaldes vinkelfrekvensen,

c et tal som kaldes faseforskydningen.

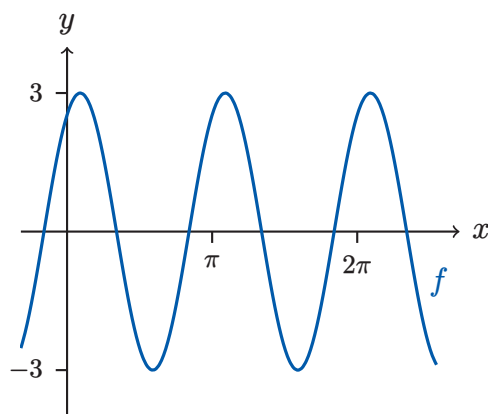
Grafen for harmonisk svingning ligner grafen for sinus, bortset fra den er strakt/sammenpresset i vandret og/eller lodret regning. Hvordan grafen bliver forskudt/strakt afhænger af værdien af konstanterne i definitionen.

Amplitude

Amplituden er konstanten a i den harmoniske svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$. Vi husker, at sinus er andenkoordinaten til retningspunktet på enhedscirklen. Derfor vil sinus svinge mellem -1 og 1 . Når vi så ganger med a , kommer funktionsværdierne til at svinge mellem $-a$ og a . Så amplituden a viser altså, hvor meget grafen er strakt i lodret retning.

Eksempel 10.3.1

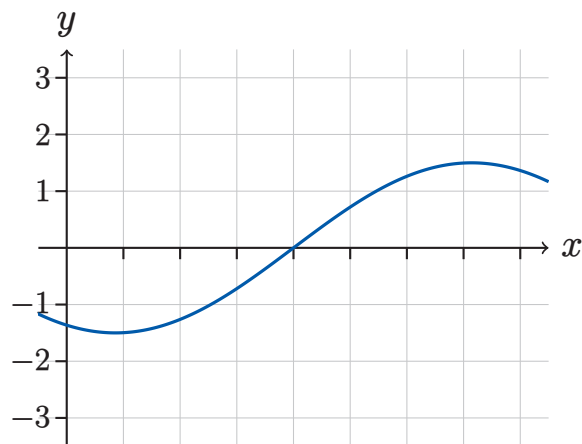
Betragt grafen for $f(x) = 3 \cdot \sin(2x + 1)$:



Amplituden for f er 3, så vi forventer at grafen svinger mellem -3 og 3 på y -aksen. Vi ser det passer med grafen.

Øvelse 10.3.1

Betragt grafen for en harmonisk svingning:



- a) Bestem amplituden.

Øvelse 10.3.2

Lad $f(x) = 7 \cdot \sin(5x - 2)$

- a) Bestem ud fra forskriften definitionsmængden for f .
b) Bestem ud fra forskriften værdimængden for f .

Vinkelfrekvens

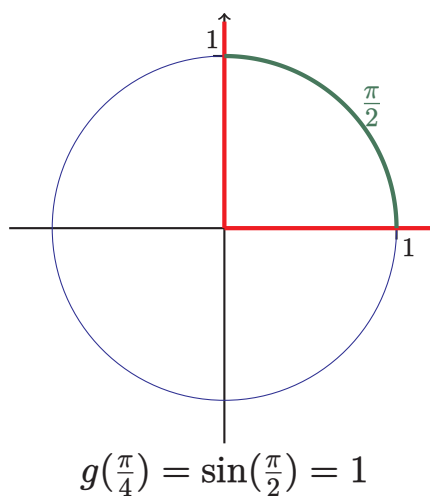
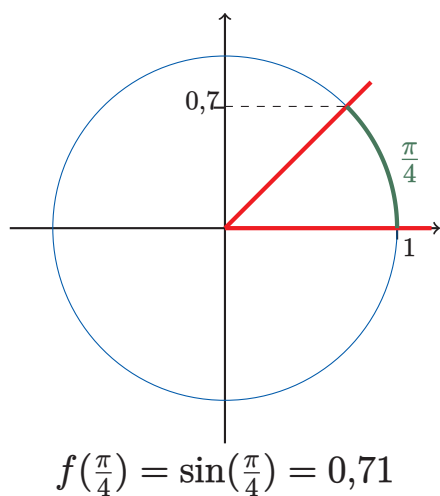
Vinkelfrekvensen er konstanten b i den harmoniske svingning:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

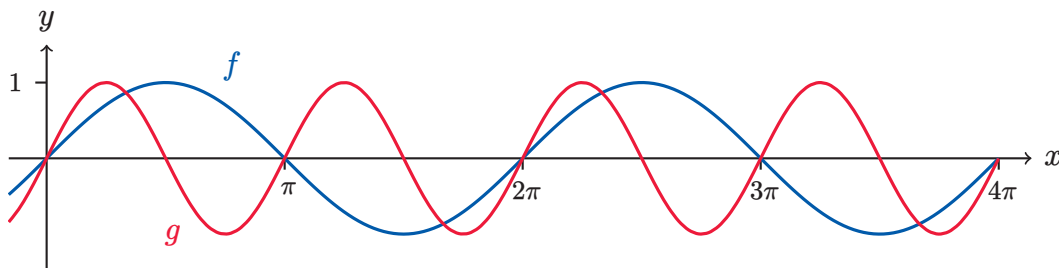
Vinkelfrekvensen afgør, hvor hurtigt funktionen svinger. Det vil vi forklare med udgangspunkt i funktionerne:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{og} \quad g(x) = \sin(2x)$$

Vi vil se på de to funktioners funktionsværdi, når $x = \frac{\pi}{4}$. Vi tegner to enhedscirkler. En med vinklen $x = \frac{\pi}{4}$ og en med vinklen $2x = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:



Vi ser, at g bevæger sig dobbelt så hurtigt rundt i enhedscirklen som f . Grafen for g former sig derfor som grafen for f bare dobbelt så hurtigt. Så mens perioden for f er 2π , er perioden for g kun π . Graferne kommer altså til at se således ud:



Man kan vise, at der gælder følgende sammenhæng mellem perioden for en harmonisk svingning og vinkelfrekvensen b :

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Øvelse 10.3.3

Lad $f(x) = 5 \cdot \sin(0,5x - 2)$

- a) Bestem perioden for f .

Øvelse 10.3.4

Ud fra formelen $T = \frac{2\pi}{b}$ kan vi bestemme en formel for b ud fra perioden.

- a) Isolér b i formlen $T = \frac{2\pi}{b}$.

I ovenstående øvelse fandt vi frem til formelen $b = \frac{2\pi}{T}$. Ved hjælp af denne formel kan vi finde b , hvis vi kan bestemme perioden.

Øvelse 10.3.5

Antag, at perioden for en trigonometrisk funktion er 8π .

- a) Bestem vinkelfrekvensen

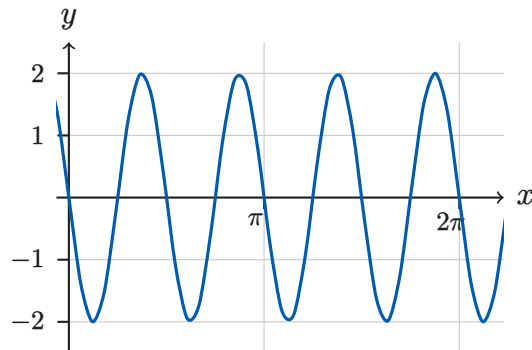
Øvelse 10.3.6 (✚)

Man fortolke b som "antallet af svingninger (perioder) der er på 2π "

- a) Argumenter for at det er en korrekt fortolkning.

Øvelse 10.3.7

Betragt den harmoniske svingning:



- a) Bestem amplituden.
b) Bestem perioden.
c) Beregn vinkelfrekvensen ud fra formlen $b = \frac{2\pi}{T}$.
d) Bestem vinkelfrekvensen ved at tælle, hvor mange svingninger der på 2π .

Vær opmærksom på, at i fysik optræder der også begrebet *frekvens*

som betegnes med f . Det er noget andet end vinkelfrekvens. Man snakker om frekvens, når man har tid ud af x -aksen. Her er viser frekvensen antallet af svingninger (perioder) på 1 sekund, og den kan beregnes ud fra perioden ved:

$$f = \frac{1}{T}$$

Øvelse 10.3.8 (✚)

Frekvensen f er antallet af svingninger på 1 sekund.

- a) Argumenter for at f kan bestemmes ved formelen $f = \frac{1}{T}$

Øvelse 10.3.9 (✚)

Frekvensen kan også beregnes ud fra vinkelfrekvensen b . Formlen er:

$$f = \frac{b}{2\pi}$$

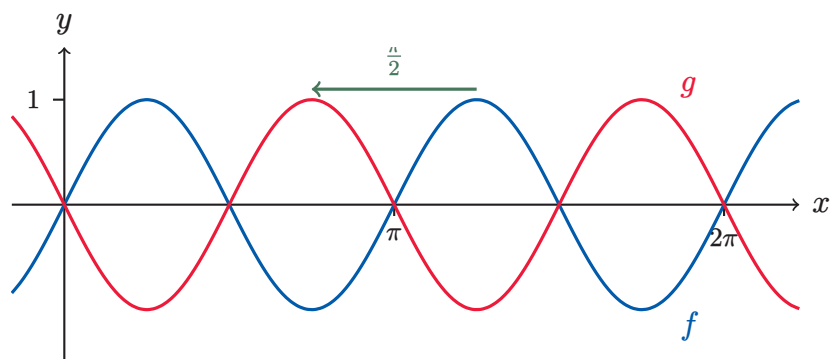
- a) Bevis formelen. VINK: Du får brug for at inddrage formelen for vinkelfrekvens: $T = \frac{2\pi}{b}$.

Faseforskydningen

Faseforskydningen er konstanten c i den harmoniske svingning:

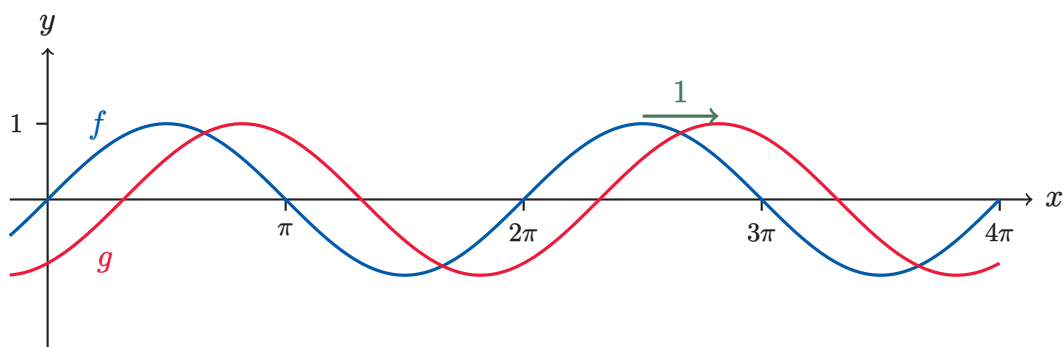
$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c).$$

Faseforskydningen forskyder grafen i vandret retning. Men forskydningen afhænger ikke kun af c . Den afhænger også af b . Grafen forskydes nemlig med $\frac{c}{b}$ til venstre. Hvis $c < 0$, får vi en negativ forskydning til venstre, hvilket selvfølgelig svarer til en positiv forskydning til højre. Så hvis f.eks. $c = \pi$ og $b = 2$ vil grafen blive forskudt med $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{2}$ til venstre – altså i forhold til hvis c var nul.



Grafer for $f(x) = \sin(2x)$ og $g(x) = \sin(2x + \pi)$.

Hvis c er negativ bliver grafen forskudt til højre:

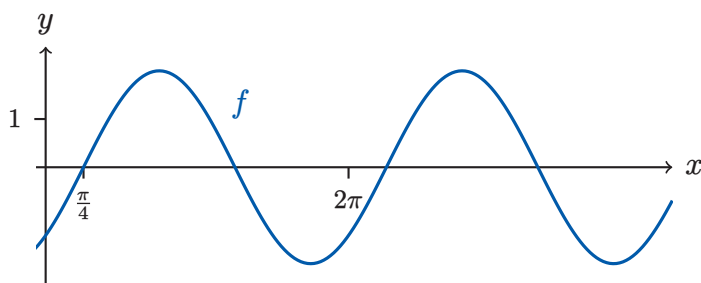


Grafer for $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \sin(x - 1)$.

Læg mærke til at når faseforskydningen er nul, så går grafen igennem $(0, 0)$ og starter med at være voksende, så det er udgangspunktet, når vi skal finde ud af hvor meget grafen er forskudt.

Eksempel 10.3.2

Betragt den harmoniske svingning:



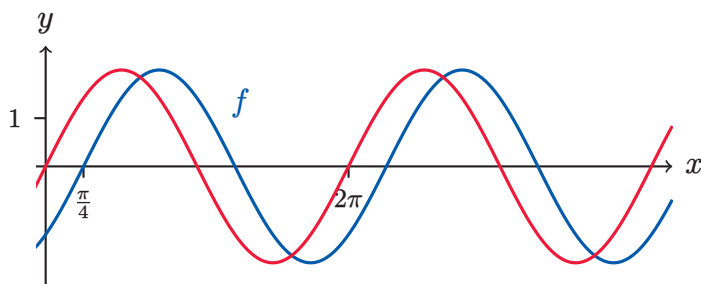
Vi vil bestemme faseforskydningen. Vi skal først bestemme b . Den kan vi finde ud fra perioden. Vi aflæser perioden til at være 2π . Vi indsætter $T = 2\pi$ i formelen

$$b = \frac{2\pi}{T}$$

Det giver:

$$b = 1$$

Vi er nu klar til at finde faseforskydningen c . Vi tegner nu den samme harmoniske svingning ind, men denne gang forskyder vi den så den starter med at være voksende igennem $(0, 0)$



Vi kan se at den blå graf er forskudt med $\frac{\pi}{4}$ til højre i forhold til den

røde. Dvs. at

$$\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$$

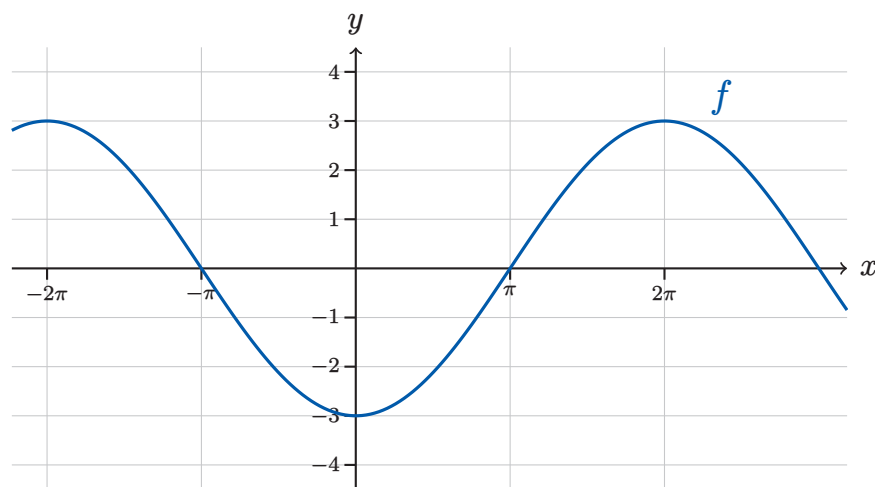
Læg mærke til det negative fortegn. Det er fordi det er en forskydning til højre. Vi har allerede bestemt $b = 1$:

$$\frac{c}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

hvilket må betyde at $c = -\frac{\pi}{4}$.

Øvelse 10.3.10

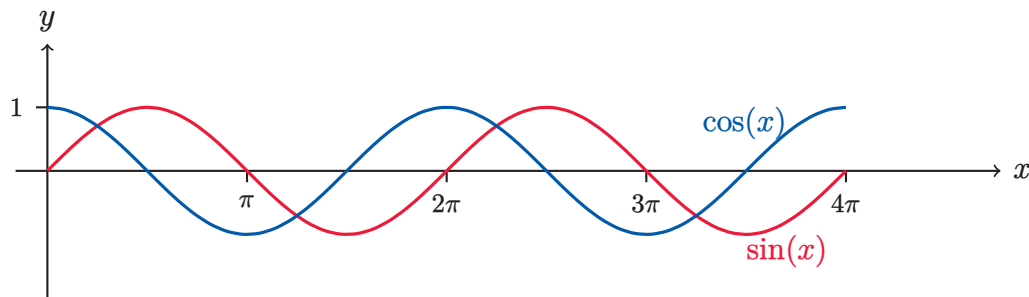
Betragt grafen for en harmonisk svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$.



- a) Bestem amplituden
- b) Bestem perioden
- c) Beregn vinkelfrekvensen
- d) Bestem faseforskydningen

Øvelse 10.3.11

Betragt grafen for $\sin(x)$ og $\cos(x)$:



- Vi kan se at grafen for cosinus er en forskydning af sinus. Hvor meget er grafen forskudt
- Brug dette til at skrive forskriften for $f(x) = \cos(x)$ på form som en harmonisk svingning $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$.

Som vi lærte i ovenstående øvelse er cosinus og sinus det samme bortset fra en forskydning. Derfor vil man ofte møde harmoniske svingninger udtrykt vha. cosinus i stedet for sinus. Vi holder os dog til sinus her på MATHHX:-)

Øvelse 10.3.12

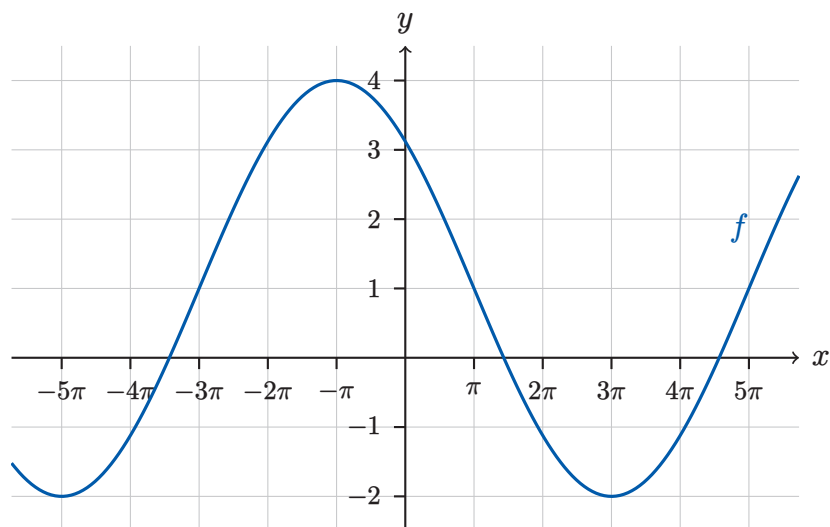
Nogle bøger definerer en harmoniske svingning som en funktion på formen:

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

Vi ser at der i denne definition er lagt en konstant d til.

- Forklar betydningen af konstanten d . Hvis du er i tvivl om, hvordan du skal afgøre det, så husk på hvad der normalt sker med grafen for en funktion, når man lægger en konstant til.

b) Aflæs værdien af d på grafen:



- c) Bestem perioden.
- d) Bestem resten af konstanterne i forskriften.
- e) Bestem frekvensen

10.4 Beviser - Trigonometriske funktioner

Vi starter med at se på nogle nyttige formler vi får brug for i det efterfølgende.

Overgangsformler

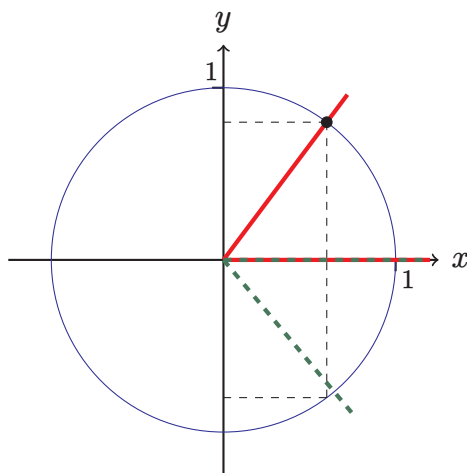
Sætning 10.4.1

For en vilkårlig vinkel x gælder følgende *overgangsformler*:

1. $\cos(-x) = \cos(x)$
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$
3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
4. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

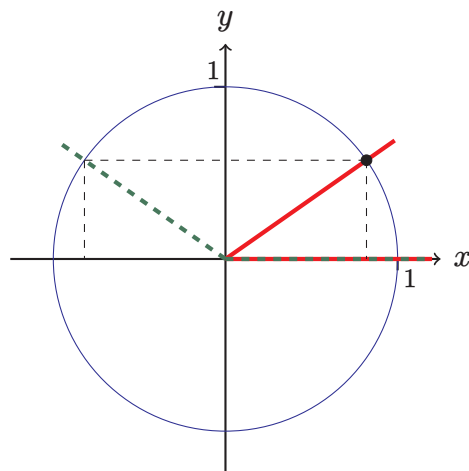
Bevis

Vi starter med vinklerne fra de to første formler:



På ovenstående tegning ses vinklen x tegnet med rød og vinklen $-x$ tegnet med grøn. Det er tydeligt at de har samme cosinusværdi, og at deres sinusværdier er lige store men med omvendt fortegn.

Lad os se på vinklerne i de to sidste formler:



På ovenstående tegning ses vinklen x tegnet med rød og vinklen $\pi - x$ tegnet med grøn. Vinklen $\pi - x$ er selvfølgelig tegnet ved at starte med en vinkel på π og så gå x baglæns. Det er tydeligt at de to vinkler har samme sinusværdi, og at deres cosinusværdier er lige store, men med omvendt fortegn.

Perioden for tangens

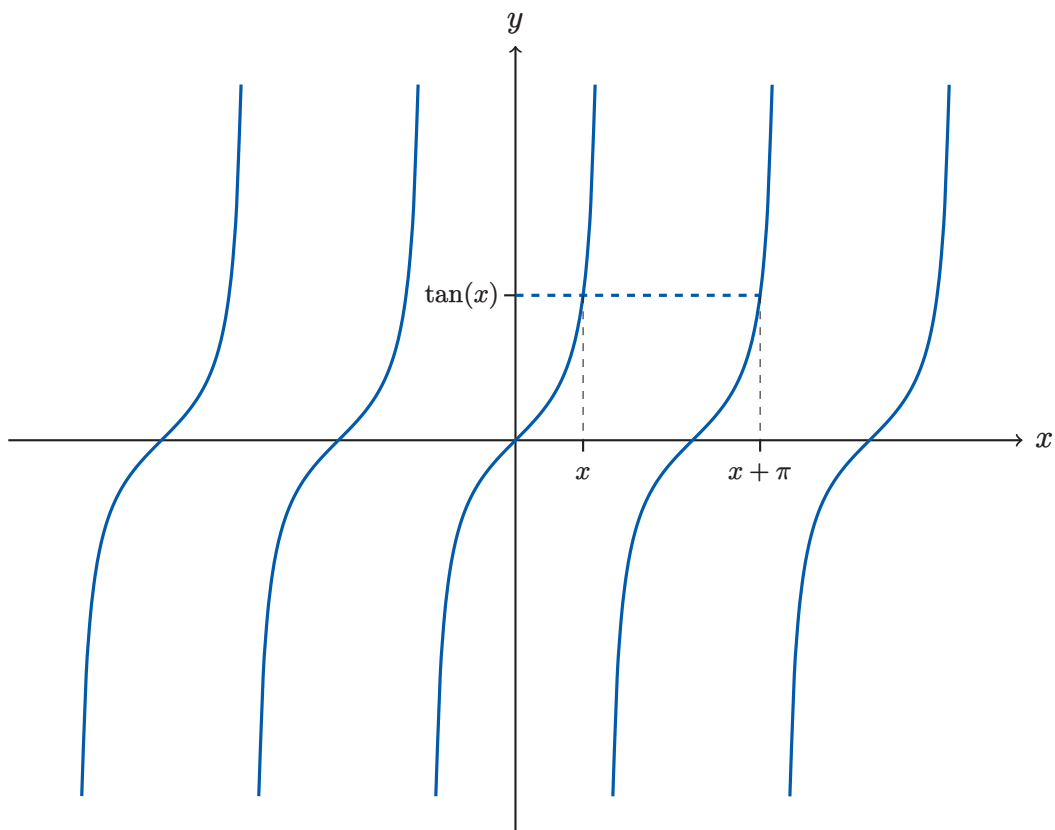
Vi vil nu bevise, at tangens er periodisk med periode π .

Sætning 10.4.2

Tangens er periodisk med periode π .

Bevis

At tangens er periodiske med π betyder at den begynder at gentage sig selv, efter vi er gået π ud af x -aksen. Det må være det samme som at funktionsværdien i et vilkårligt x er den samme som funktionsværdien i $x + \pi$:



Vi skal altså vise at $\tan(x) = \tan(x + \pi)$.

$$\begin{aligned}
\tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} && \text{pr. definition af tangens} \\
&= \frac{\sin(\pi - (-x))}{\cos(\pi - (-x))} && \text{da } x = -(-x) \\
&= \frac{\sin(-x)}{-\cos(-x)} && \text{overgangsformel 3 og 4} \\
&= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} && \text{overgangsformel 1 og 2} \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} && \text{forkortet med } -1 \\
&= \tan(x)
\end{aligned}$$

Vi har nu vist at $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ og tangens er altså periodisk med periode π .

Harmoniske svingninger

Sammenhæng mellem periode og vinkelfrekvens

Man kan regne perioden ud fra vinkelfrekvensen med formlen

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Vi vil nu udlede denne formel. Vi har den harmoniske svingning

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$$

Perioden er den (mindste) konstant T som opfylder:

$$f(x) = f(x + T)$$

Vi indsætter forskriften for f :

$$a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin(b(x + T) + c)$$

Vi regner parentesen inde i sinus på højresiden:

$$a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin(bx + bT + c)$$

Vi kan se at der står det samme på begge sider bortset fra størrelsen bT , som er lagt til inde i sinus funktionen på højresiden. Da sinus er periodisk med 2π , skal denne størrelse give 2π før at vi får det samme på begge sider af lighedstegnet. Dvs.

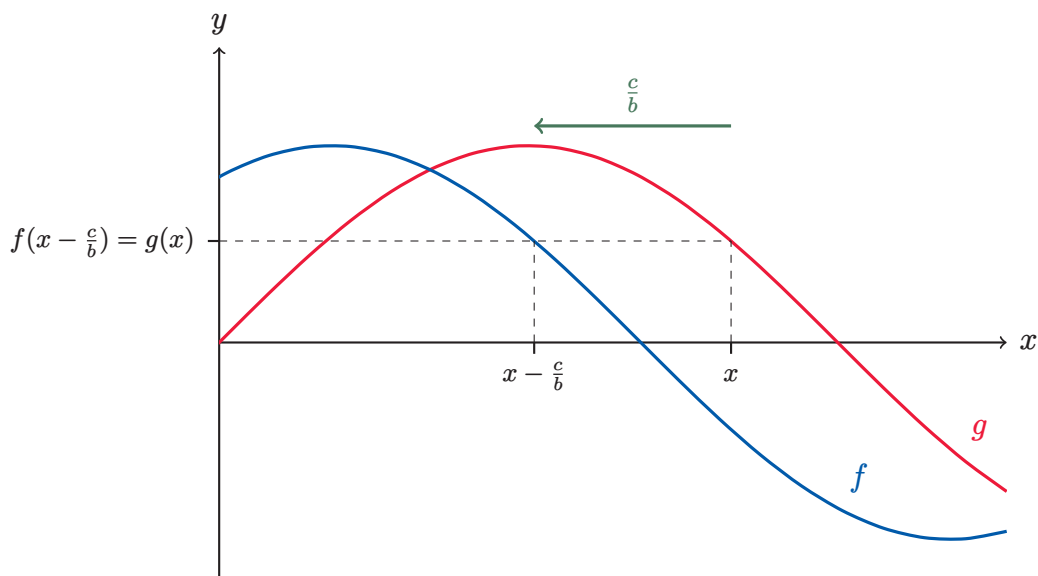
$$bT = 2\pi$$

Vi deler med b :

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Faseforskydning

Faseforskydningen forskyder grafen langs x -aksen. Mere præcist: Grafen for funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ fremkommer ud fra grafen for $g(x) = a \cdot \sin(bx)$ ved at forskyde g med $\frac{c}{b}$ til venstre, hvis $c > 0$. Vi vil nu vise dette. Vi starter med en illustration af påstanden:



Tegning viser at f er opstået ud fra g ved en vandret forskydning til venstre med $\frac{c}{b}$, hvis f opfylder $f(x - \frac{c}{b}) = f(x)$. Så vi skal altså eftervise at $f(x - \frac{c}{b}) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(x - \frac{c}{b}) &= a \cdot \sin(b(x - \frac{c}{b}) + c) \\
 &= a \cdot \sin(bx - b\frac{c}{b} + c) \\
 &= a \cdot \sin(bx - c + c) \\
 &= a \cdot \sin(bx) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

Så jo, den var god nok. Grafen for f er opstået ud fra grafen for g ved at forskyde g med $\frac{c}{b}$ til venstre.

Øvelse 10.4.1 (♣)

I ovenstående har vi taget udgangspunkt i en positiv faseforskydning, når vi tegnede grafen for f .

- a) Hvordan kunne tegningen se ud, hvis c er negativ?

Ekstra

Der er et problem i vores bevis for perioden for tangens. Vi har vist, at

$$\tan(x) = \tan(x + \pi)$$

Men det betyder faktisk kun at tangens er periodisk med **højst** π (hvorfor?). Vi kan dog nemt tjekke, at perioden ikke kan være mindre end π . Vi skal altså se, om der findes et tal $T < \pi$ så

$$\tan(x) = \tan(x + T)$$

Det skal gælde for alle x , så lad os bare tage udgangspunkt i $x = 0$. Vi skal altså se om der findes et tal $T < \pi$ så

$$\tan(0) = \tan(T)$$

Vi regner $\tan(0)$:

$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

Så $\tan(0) = 0$. Hvor langt mon vi skal gå ud før tangens bliver nul igen? Ja, hvis $\tan(T)$ skal være nul, så skal $\sin(T)$ give nul, og næste gang sinus giver nul er ved $x = \pi$. Så perioden T kan ikke være mindre end π . Vi viste først, at perioden var højst π , og nu har vi argumenteret for, at den er mindst π . Det betyder at perioden er π .

Kapitel 11

Trigonometri (S)

Trigonometri handler om at bestemme vinkler og sider i trekanter, hvilket man ofte har brug for i fysik. Derudover bruger man også trigonometri i forbindelse med vektorregning.

11.1 Vinkler og trekanter

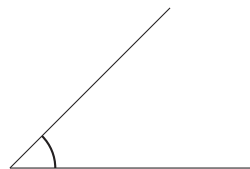
I dette afsnit skal vi se på grundlæggende regler for vinkler. Det meste burde være kendt for folkeskolen.

Definition 11.1.1

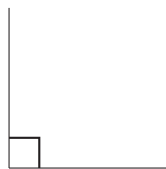
En vinkel som er mindre end 90° kaldes *spids*.

En vinkel som er 90° kaldes *ret*.

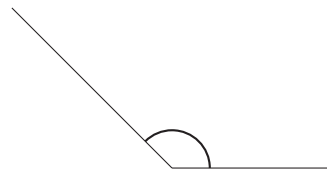
En vinkel som er større end 90° kaldes *stump*.



Spids vinkel



ret vinkel



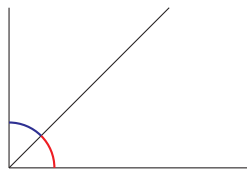
Stump vinkel

Læg mærke til at den rette vinkel markeres med et "hak" i stedet for en bue.

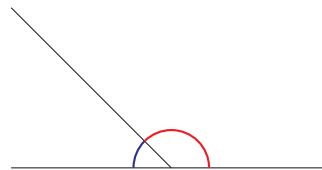
Definition 11.1.2

To vinkler der til sammen giver 90° kaldes komplementvinkler.

To vinkler der til sammen giver 180° kaldes supplementvinkler.



Komplementvinkler

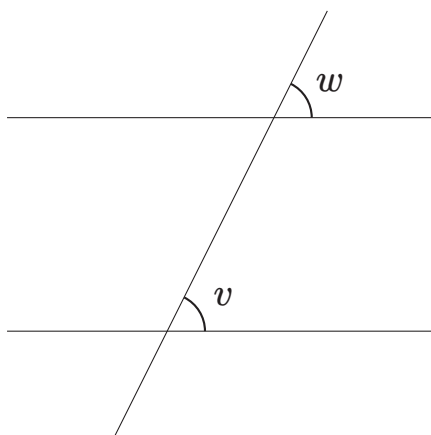


Supplementvinkler

Regel 11.1.1

(Ensliggende vinkler)

Lad der være givet to parallelle linjer, som krydses af en tredje linje:

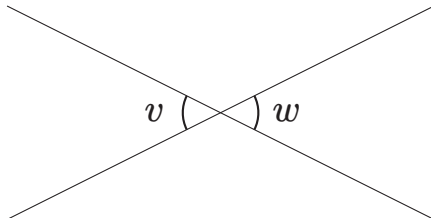


De to vinkler v og w er lige store. De kaldes *ensliggende vinkler*.

Regel 11.1.2

(Topvinkler)

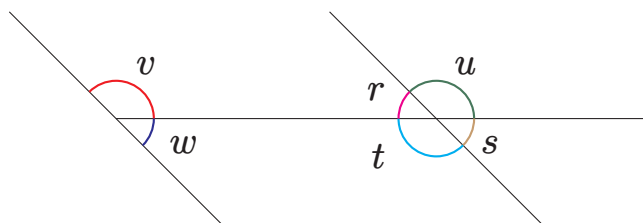
Lad der være givet to linjer som krydser hinanden.



De to vinkler v og w er lige store. De kaldes *topvinkler*.

Øvelse 11.1.1

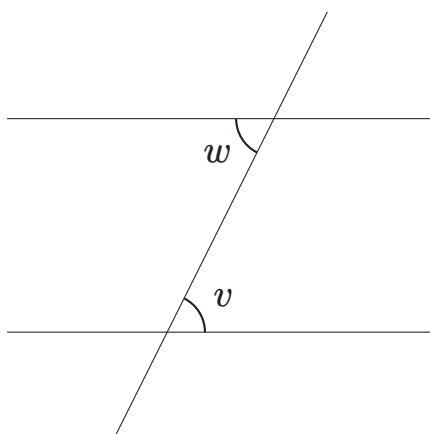
Betragt figuren:



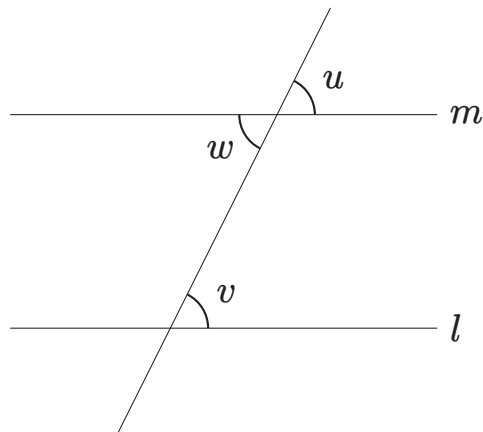
- a) Hvilke vinkler er ensliggende?
- b) Hvilke vinkler er topvinkler?
- c) Hvilke vinkler er komplementvinkler?
- d) Hvor mange sæt af supplementvinkler er der?
- e) Hvilke vinkler er ens?

Eksempel 11.1.1

Lad der være givet to parallelle linjer, som skæres af en tredje linje.



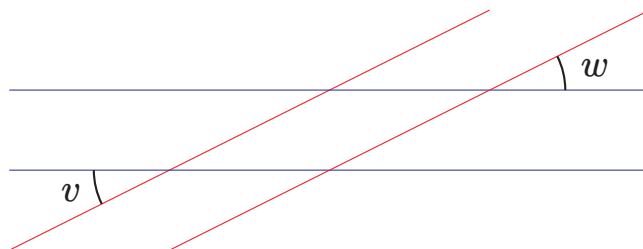
Vi vil vise at $v = w$. Vi indtegner en vinkel u :



Da u er ensliggende med v er $u = v$. Da u er topvinkel til w er $u = w$.
Altså må $v = w$.

Øvelse 11.1.2

Betragt figuren:

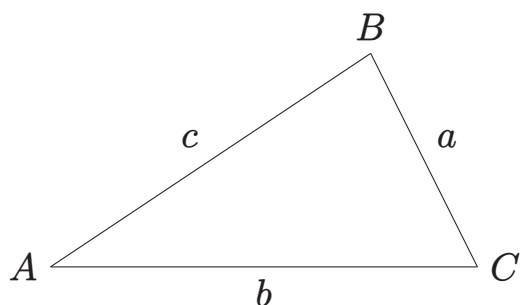


De røde linjer er parallelle og de blå linjer er parallelle.

a) Gør rede for at $v = w$.

Sider og vinkler i trekanter

Når vi kigger på sider og vinkler i trekanter, betegner vi hver vinkel med et stort bogstav og den modstående side med det samme bogstav men som småt bogstav (f.eks. A og a):



En trekant navngivet som ovenstående kaldes "trekant ABC ".

Regel 11.1.3

(Vinkelsummen i en trekant)

Vinkelsummen i en trekant er 180° .

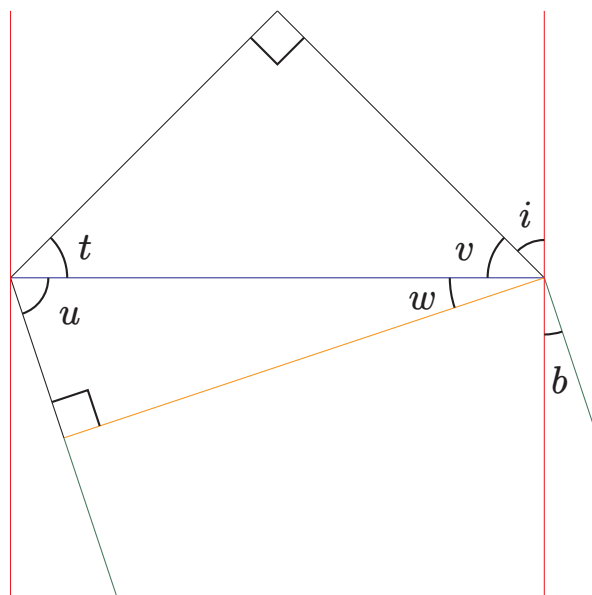
Øvelse 11.1.3

Antag at vi har en trekant ABC . Antag at $A = 30^\circ$, $B = 20^\circ$

- a) Bestem vinklen C
- b) Er C spids, ret eller stump?

Øvelse 11.1.4

Betragt figuren:



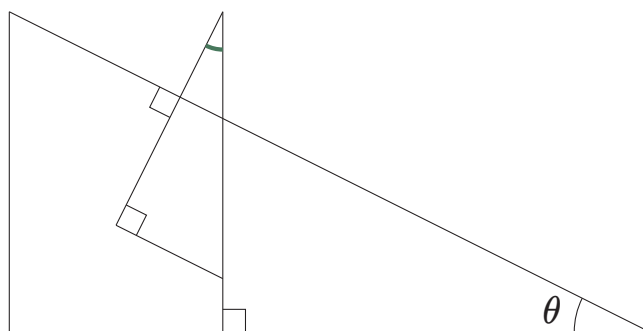
De røde linjer står vinkelret på den blå, og de grønne linjer står vinkelret på den orange.

- Gør rede for at $v = 90^\circ - i$.
- Gør rede for at $w = b$
- Gør rede for at $u = 90^\circ - b$
- Gør redet for at $t = b$.
- Lav en tegning af figuren, hvor du udtrykker alle vinklerne ved i og b .

I skal nu regne en øvelse som er relevant når man skal se på bevægelse på et skråplan i fysik. Jeg håber ikke I synes, at vi er ude på et skråplan med sådan en øvelse.

Øvelse 11.1.5

Betragt figuren:

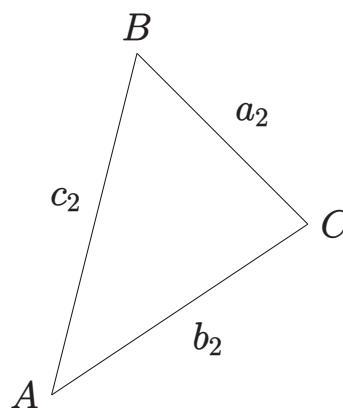
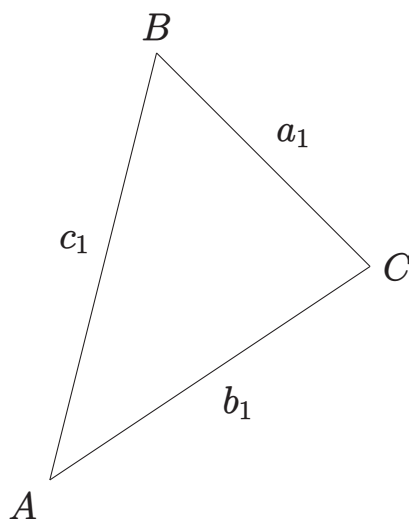


Bogstavet θ er det græske "theta".

a) Gør rede for at den grønne vinkel er θ .

Regel 11.1.4

To trekanter kaldes *ensvinklede* eller *ligedannede*, hvis de har de samme vinkler:



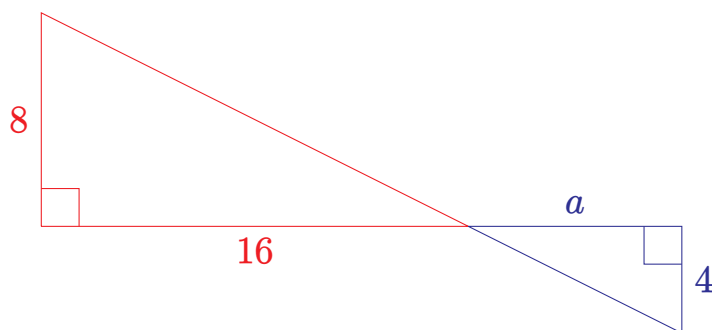
De sider (i hver sin trekant), der ligger over for samme vinkel, kaldes *ensliggende* (f.eks. a_1 og a_2).

I ensliggende trekanter er forholdet mellem ensliggende sider er konstant. Dvs.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Eksempel 11.1.2

Betragt figuren:



Vi ser at de to trekanter er ensvinklede fordi de to vinkler op til det punkt, hvor trekanterne mødes er topvinkler. Da vinkelsummen er 180° og de trekanter er retvinklede, må de sidste vinkler også være ens.

Vi kan regne siden a at udnytte at forholdet mellem ensliggende sider er konstant:

$$\frac{4}{8} = \frac{a}{16}$$

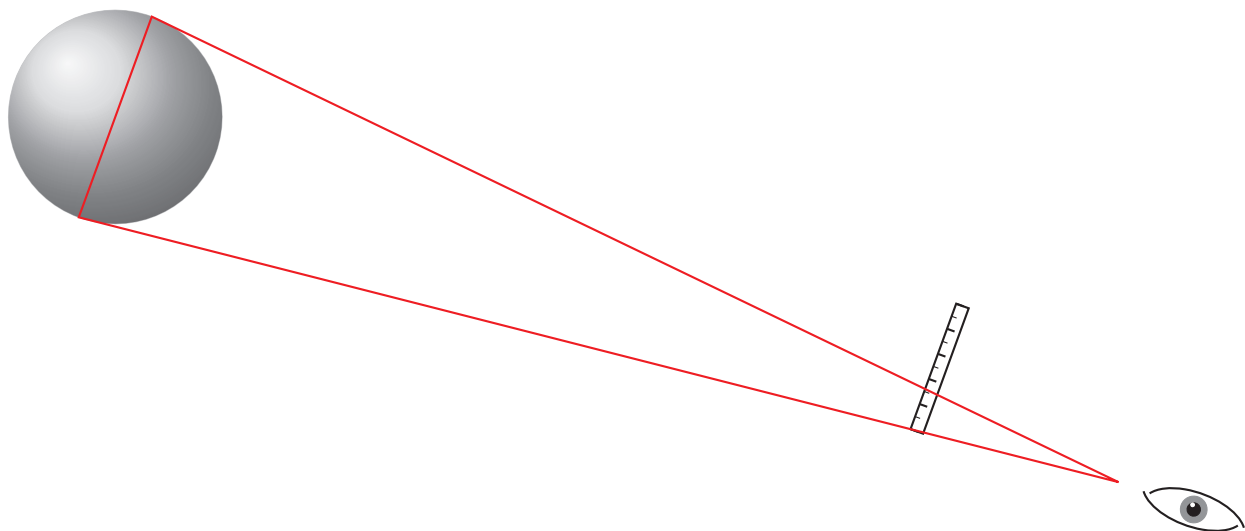
Vi ganger med 16 på begge sider:

$$16 \cdot \frac{4}{8} = a$$

Dvs. $a = 8$.

Øvelse 11.1.6

En dame vil måle afstanden til månen hun holder en lineal ud i strakt arm. Afstanden fra øje til lineal er 60 cm, månens radius er 1737,4 km og hun måler månen til at være 5,5 mm bred på linealen.



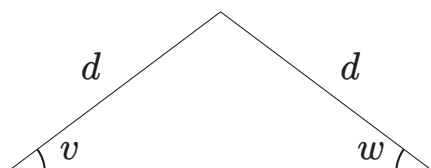
- a) Omregn alle størrelser til meter.
- b) Hvilken regel i dette afsnit skal du have fat i, hvis du vil regne afstanden til månen?
- c) Regn afstanden til månen.

Ekstra

Her er liiige et par ekstra regler du får brug for i de kommende ekstra-afsnit.

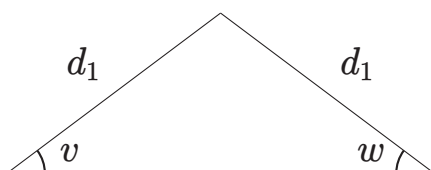
Regel 11.1.5

En ligebenet trekant er en trekant med to lige lange sider.



Her er de to vinkler v og w altid lige store. Vinklerne v og w kaldes *grundvinklerne*.

Har man omvendt en trekant med to ens vinkler, ja så er den også ligebenet. Dvs., at hvis $v = w$, så er $d_1 = d_2$:



Regel 11.1.6

En trekant kaldes *ligevinklet*, hvis alle trekantens vinkler er ens. En trekant kaldes *ligesidet*, hvis alle sider er ens.

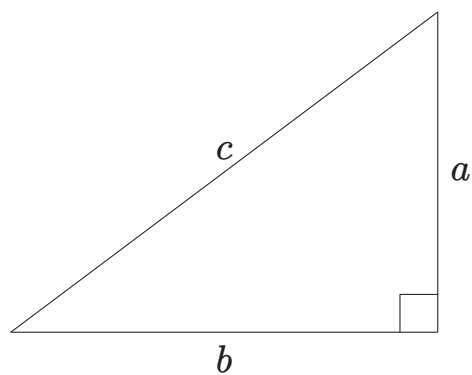
En ligevinklet trekant er altid ligesidet og en ligesidet trekant er altid ligevinklet.

11.2 Retvinklede trekanter

En trekant som har en ret vinkel kaldes en retvinklet trekant. Følgende sætninger burde være kendt fra folkeskolen (måske formuleret lidt anderledes).

Sætning 11.2.1**(Pythagoras' læresætning)**

Betragt den retvinklede trekant:

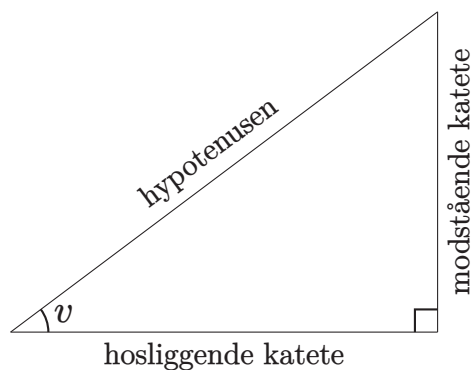


Der gælder:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sætning 11.2.2

Betragt den retvinklede trekant:



Der gælder:

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

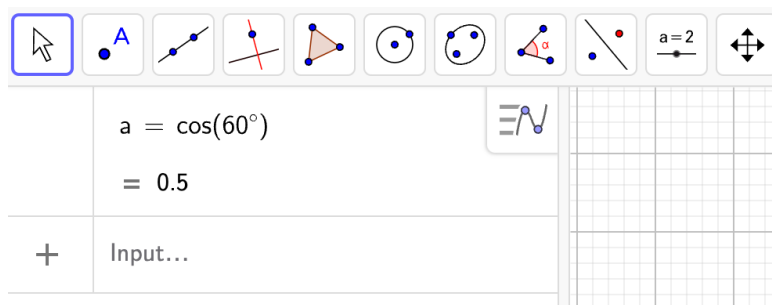
$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Skal ovenstående sætning anvendes i praksis er det nødvendigt at kunne regne med cosinus, sinus og tangens:

Eksempel 11.2.1

Vi vil regne $\cos(60^\circ)$. vi åbner et algebravindue i GeoGebra og skriver $\cos(60)$ (læg mærke til at vi ikke behøver at skrive grader ($^\circ$) — det klarer GeoGebra for os):

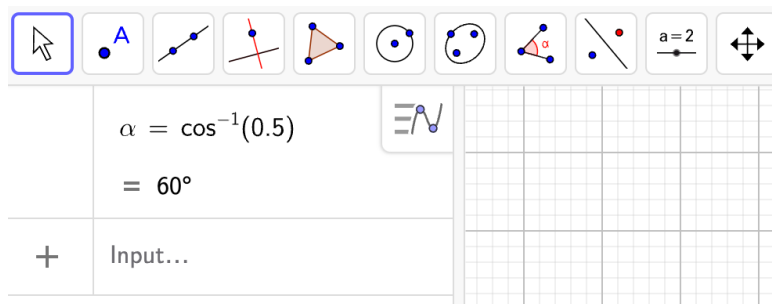


Vi ser at $\cos(60^\circ) = 0,5$

Nogle gange kender vi f.eks. cosinusværdien og vil gerne regne tilbage til vinklen. Vi har derfor brug for den omvendte funktion til cosinus og den kaldes $\cos^{-1}$ eller *arcus cosinus*. Man kan regne den i GeoGebra med kommandoen **acos(x)**.

Eksempel 11.2.2

Lad os sige at vi ved at $\cos(v) = 0,5$ og vi gerne vil regne tilbage til vinklen. Vi taster **acosd(0.5)** i et algebravindue i GeoGebra (d'et i "acosd" står for "degrees", så vi får vinklen i grader):



Vi ser at $\cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$. Easy money. Læg mærke til, at det er GeoGebra, som skriver " $\cos^{-1}(0.5)$ ". Vi har indtastet **acosd(0.5)**

Der findes selvfølgelig også omvendte funktioner til de andre trigono-

metriske funktioner og de hedder det tilsvarende i GeoGebra. F.eks. hedder $\sin^{-1}$ `asind` (når man vil have vinklen i grader) i GeoGebra.

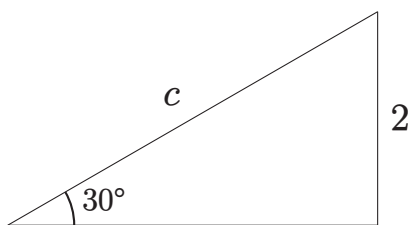
Øvelse 11.2.1

Du skal nu selv prøve.

- a) Regn $\sin(60^\circ)$ i GeoGebra
- b) Bestem v når $\sin(v) = 0,7$ i GeoGebra.

Eksempel 11.2.3

Betragt trekanten



Vi vil beregne længden af hypotenusen c . Vi finder en formel fra sætning 11.2.2, som indeholder de to størrelser vi kender (vinkel og modstående katete)

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi indsætter vores oplysninger:

$$\sin(30^\circ) = \frac{2}{c}.$$

Vi isolerer c :

$$c = \frac{2}{\sin(30^\circ)},$$

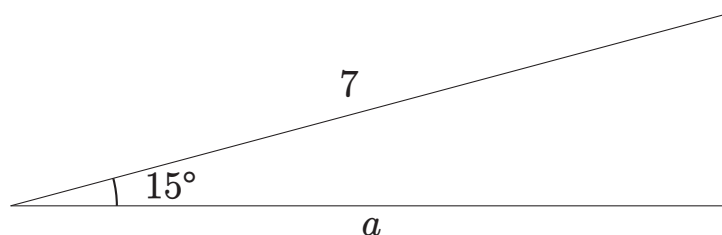
og regner resultatet i GeoGebra/lommeregner:

$$c = 4.$$

Længden af hypotenusen er altså 4.

Øvelse 11.2.2

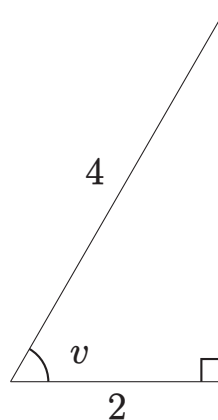
Betragt den retvinklede trekant:



- a) Beregn sidelængden a
- b) Beregn resten af siderne og vinklerne

Eksempel 11.2.4

Betragt trekanten:



Vi vil bestemme v . Vi finder den formel som indeholder de størrelser vi har:

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi indsætter

$$\cos(v) = \frac{2}{4},$$

og regner

$$\cos(v) = 0,5,$$

og isolerer v :

$$v = \cos^{-1}(0,5),$$

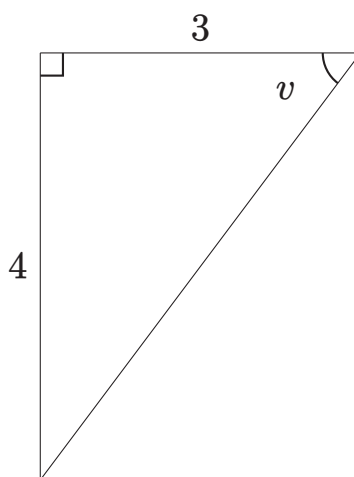
og får:

$$v = 60^\circ,$$

og det passer da meget godt med tegningen.

Øvelse 11.2.3

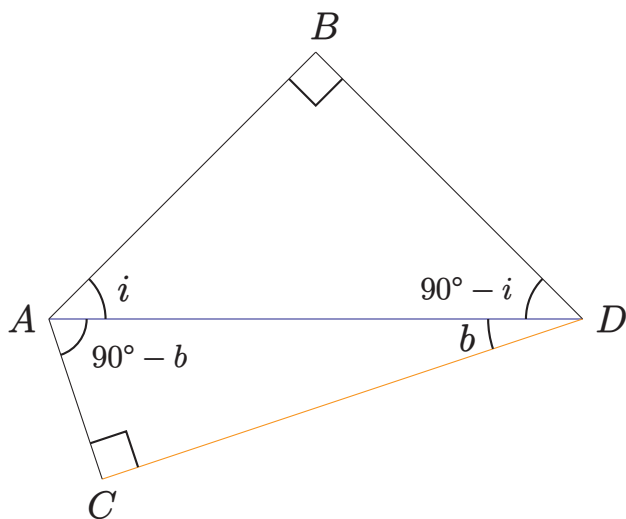
Betragt trekanten:



- a) Bestem vinklen v
- b) Bestem resten af vinklerne og siderne i trekanten.

Øvelse 11.2.4

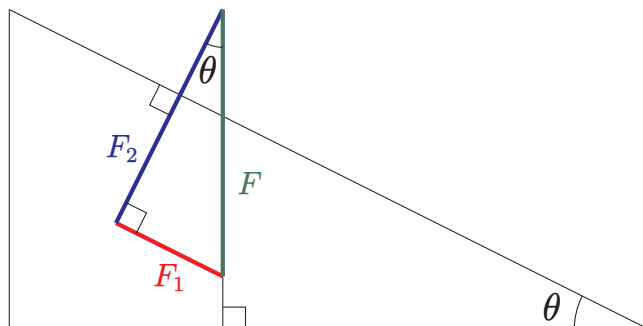
Vi vender nu tilbage til figuren fra øvelse 11.1.4:



- a) Gør rede for at $BD = AD \cdot \sin(i)$. Skrivemåden BD betyder længden af siden fra B til D , hvis du ikke allerede kunne regne det ud:-)
- b) Gør rede for at $AC = AD \cdot \sin(b)$
- c) Gør rede for at $\frac{BD}{AC} = \frac{\sin(i)}{\sin(b)}$

Øvelse 11.2.5

Vi vender tilbage til figuren fra øvelse 11.1.4:

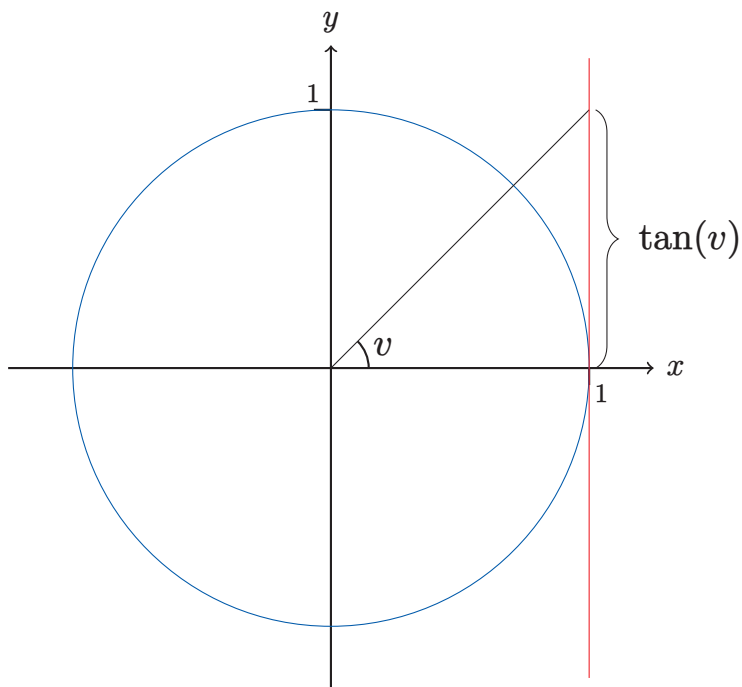


a) Gør rede for at $F_1 = F \cdot \sin(\theta)$

b) Gør rede for at $F_2 = F \cdot \cos(\theta)$

Ekstra

Man kan aflæse tangens i enhedscirklen på følgende måde:



Den røde linje er parallel med y-aksen og går igennem $(1, 0)$.

Øvelse 11.2.6

Du skal bevise ovenstående påstand.

- a) Vis at tangens kan findes som det markerede stykke på tegningen oven over.

Der findes "pæne" værdier for cosinus, sinus og tangens for udvalgte vinkler.

Grader	Radianer	$\sin(v)$	$\cos(v)$	$\tan(v)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Udefineret
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	Udefineret
360°	2π	0	1	0

Tabel 11.1: Udvalgte værdier for sinus cosinus og tangens

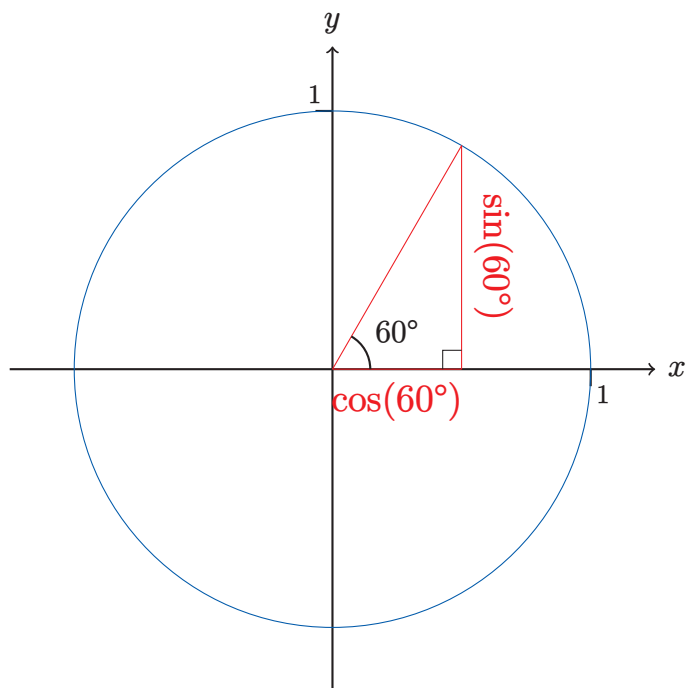
Eksempel 11.2.5

Vi vil regne os frem til en af rækkerne i tabellen:

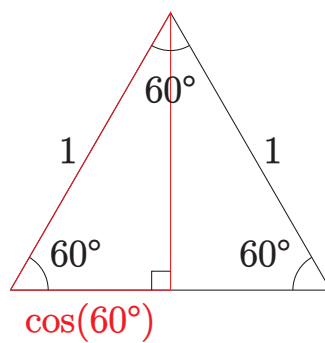
Grader	Radianer	$\sin(v)$	$\cos(v)$	$\tan(v)$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Da 60° er $\frac{1}{6}$ af 360° , må vinklen være på $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ radianter. Nemt. Vi

tegner nu vinklen ind i enhedscirklen:



Tag den røde trekant og spejl den i den lodrette side, så fås en en trekant hvor alle vinkler er 60° :



Grundlinjen i denne trekant må være

$$2 \cdot \cos(60^\circ)$$

og da den store trekant er ligevinklet er den også ligesidet derfor må den sidste side også være 1, så

$$2 \cdot \cos(60^\circ) = 1$$

dvs.

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

Vi kan regne sinusværdien ud fra den røde trekant nu, hvor vi ved at $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$. Vi bruger Pythagoras:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin(60^\circ)^2 = 1^2$$

Vi finder $\sin(60^\circ)$

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ) &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Altså $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vi kan til sidst regne tangens:

$$\begin{aligned}\tan(60^\circ) &= \frac{\sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Altså $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

Øvelse 11.2.7

Din tur.

- a) Argumenter for resten af værdierne i tabellen.

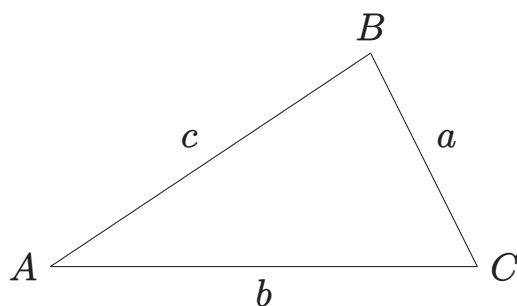
11.3 Vilkårlige trekanter

De sætninger vi brugte i sidste afsnit gælder kun i retvinklede trekanter. Har man en trekant der **ikke** er retvinklet, skal der skrappere midler til. I stedet for sætningen med sinus, cosinus og tangens i en retvinklet trekant har vi nu to sætninger: cosinus- og sinusrelationerne.

Sætning 11.3.1

(Cosinusrelationerne)

Lad der været givet en vilkårlig trekant:

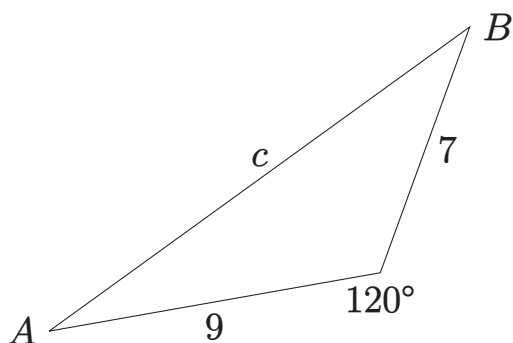


Da gælder

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$

Eksempel 11.3.1

Antag at vi har en trekant ABC, hvor $a = 7$, $b = 9$ og $C = 120^\circ$.



Vi vil bestemme c .

Vi bruger cosinusrelationerne:

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \\&= 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(120^\circ) \\&= 193\end{aligned}$$

Vi finder nu c ved at tage kvadratroden af 193:

$$c = \sqrt{193} = 13,89$$

Det eksempel vi lige har set, var en nem anvendelse af cosinusrelationerne. Skal man finde en vinkel skal der arbejdes lidt mere

Eksempel 11.3.2

Vi vil bestemme vinkel A i ovenstående eksempel. Vi starter med cosinusrelationen, hvor A indgår:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Vi isolerer nu $\cos(A)$. Først lægger vi $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$ til på begge sider og trækker samtidig a^2 fra på begge sider:

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) = b^2 + c^2 - a^2$$

Vi deler nu med $2 \cdot b \cdot c$ på begge sider:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Vi kan nu indsætte værdierne fra sidste eksempel ($a = 7$, $b = 9$ og $c = 13,89$):

$$\cos(A) = \frac{9^2 + 13,89^2 - 7^2}{2 \cdot 9 \cdot 13,89}$$

Vi taster på lommeregner (jeg har tastet 13,89 som $\sqrt{193}$, da det er mere præcist)

$$\cos(A) = 0,8998$$

Vi tager $\cos^{-1}$ på begge sider og

$$A = \cos^{-1}(0,899770)$$

Vi taster i GeoGebra og får:

$$A = 25,87^\circ$$

Øvelse 11.3.1

Du skal nu regne trekanten fra de to ovenstående eksempler færdig.

- a) Brug cosinusrelationerne til at finde B .
- b) Findes der en nemmere måde at finde B ?

Øvelse 11.3.2

Antag, at vi har en trekant ABC med sider $a = 4$, $b = 5$ og $c = 6$.

- a) Bestem vinkel A
- b) Bestem vinkel B
- c) Bestem vinkel C

Generel skal man kende tre størrelser (sider eller vinkler) for at regne trekanten, men kender man kun trekantens vinkler, kan man ikke vide hvad siderne er. Kender man en vinkel, en hosliggende side og den modstående side, er der generelt to muligheder for hvordan trekanten kan se ud:

Øvelse 11.3.3 (♣)

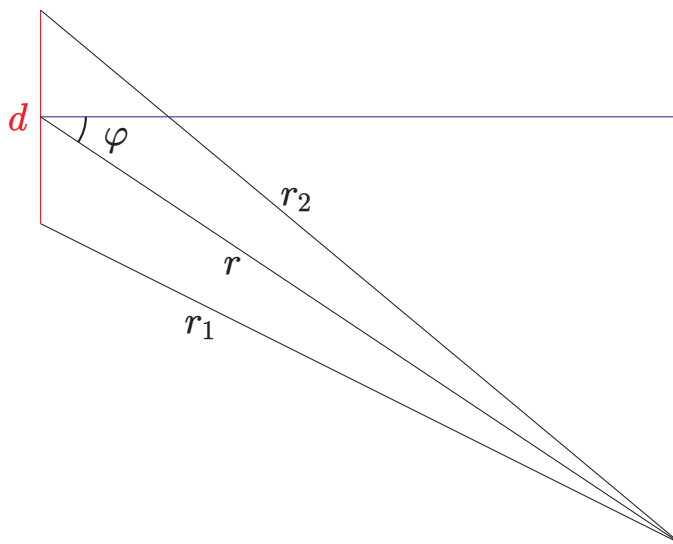
Antag, at vi har en trekant ABC med $A = 30^\circ$, $a = 7$ og $b = 10$.

- Der er to muligheder for sidelængden c . Find begge muligheder.
- Bestem de restrende og vinkler i de to trekanter.
- Lav en skitse af trekanterne, der viser, hvordan der kan være to mulige trekanter.

Vi skal nu regne en øvelse som dækker over den matematik man skal bruge i forbindelse med udledning af den såkaldte "gitterligning" i fysik.

Øvelse 11.3.4

Betragt figuren:



Det røde linjestykke er vinkelret på det blå og det blå rammer det røde i det rødes midtpunkt. Bogstavet φ er det græske "fi".

I denne øvelse skal vi komme frem til, at når den blå linje er meget længere end den røde (forstil dig at vi havde tegnet figuren så den røde linje var så kort, at r_1 , r_2 og r nærmest var parallelle), så vil forskellen mellem længderne r_1 og r_2 være omtrent $d \cdot \sin(\varphi)$. Altså at

$$r_2 - r_1 \approx d \cdot \sin(\varphi)$$

Det er lidt af en mundfuld, så vi gør det i små bidder.

a) Gør rede for at

$$(r_1)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot r \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

b) Brug overgangsformlen $\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$ til at reducere udtrykket.

c) Gør rede for at

$$(r_2)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot r \cdot \cos(90^\circ + \varphi)$$

d) Brug overgangsformlen $\cos(90^\circ + v) = -\sin(v)$ til at reducere udtrykket.

e) Beregn $(r_2)^2 - (r_1)^2$

f) Vis at $(r_2)^2 - (r_1)^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$

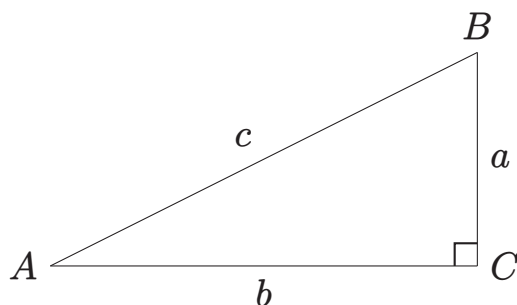
g) Argumenter for at $(r_2)^2 - (r_1)^2 \approx 2r(r_2 - r_1)$, når den blå linje er meget længere end den røde. Forstil dig f.eks. den røde linje på figuren var så kort at du kun lige akkurat kunne se den.

h) Vis nu at $2r(r_2 - r_1) \approx 2 \cdot d \cdot r \cdot \sin(\varphi)$, når den blå linje er meget længere end den røde.

- i) Vis nu at $r_2 - r_1 \approx d \cdot \sin(\varphi)$, når den blå linje er meget længere end den røde.

Øvelse 11.3.5

Betragt den retvinklede trekant:



- Opskriv den 3. cosinusrelation.
- Udnyt at $C = 90^\circ$ til at forsimple den opskrevne cosinusrelation.
- Dit resultat ligner noget, du har set før. Hvad?

Ovenstående øvelse viser, at man kan opfatte cosinusrelationerne som en generalisering af Pythagoras læresætning.

Sinusrelationerne

Cosinusrelationerne kan bruges til at finde de resterende sider og vinkler når man har:

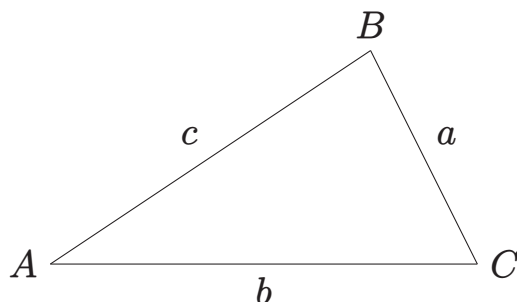
- En vinkel og to sider.
- Alle tre sider.

Har vi to vinkler og en side kan vi bestemme de resterende sider og vinkler ved at bruge *sinusrelationerne*:

Sætning 11.3.2

(Sinusrelationerne)

Lad der været givet en vilkårlig trekant:



Da gælder:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Øvelse 11.3.6

Sinusrelationerne ser således ud:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

a) Vis at sinusrelationerne kan omskrives til:

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Eksempel 11.3.3

Antag, at vi har en trekant ABC med $A = 20^\circ$, $a = 3$ og $b = 5$

Vi kan bestemme vinklen B vha. sinusrelationerne. Vi vil bruge dem i den form vi lige har udledt i øvelsen oven over.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

Vi ganger med b på begge sider:

$$b \cdot \frac{\sin(A)}{a} = \sin(B)$$

Vi indsætter oplysningerne:

$$5 \cdot \frac{\sin(20^\circ)}{3} = \sin(B)$$

Vi taster i GeoGeo:

$$\sin(B) = 0.5700335722$$

Vi tager $\sin^{-1}$ på begge sider

$$B = 34.75^\circ$$

Øvelse 11.3.7

Du skal nu finde de resterende sider og vinkler i trekanten fra eksemplet oven over.

- Bestem C
- Brug sinusrelationerne til at bestemme c .

Øvelse 11.3.8

Lad der være givet en trekant ABC med $B = 120^\circ$, $C = 20^\circ$ og $c = 11$

- a) Bestem de resterende sider.

Øvelse 11.3.9 (♣)

Vi vender tilbage til øvelse øvelse 11.3.3. Her havde vi en trekant ABC med $A = 30^\circ$, $a = 7$ og $b = 10$.

- a) Brug sinusrelationerne til at bestemme $\sin(B)$.
- b) Bestem nu B ud fra $\sin(B)$.
- c) Ved at betragte enhedscirklen, skal du komme frem til en anden vinkel $0 < B_2 < 180^\circ$ som også opfylder $\sin(B) = 0,7142857143$
- d) Bestem resten af siderne og vinklerne de to mulige trekanter uden at bruge cosinusrelationerne

Hvornår bruger man cosinus- og sinusrelationerne?

Både cosinus- og sinusrelationerne handler om fire størrelser i en trekant. Har man tre af de fire størrelser kan man finde den sidste, hvis der altså er en entydig trekant, som er givet ved de opgivne størrelser. Vi opsummerer:

Hvis du har	Brug
Tre sider	Cosinusrelationerne
En vinkel og de to hosliggende sider	Cosinusrelationerne
En vinkel, en hosliggende side og en modstående side	Cosinusrelationerne eller sinusrelationerne. Se evt. kommentar i ekstraafsnit
To vinkler og en side	Sinusrelationerne

Husk dog, at hvis du har en retvinklet trekant, så er det bedst at bruge metoderne fra sidste afsnit. Skål!

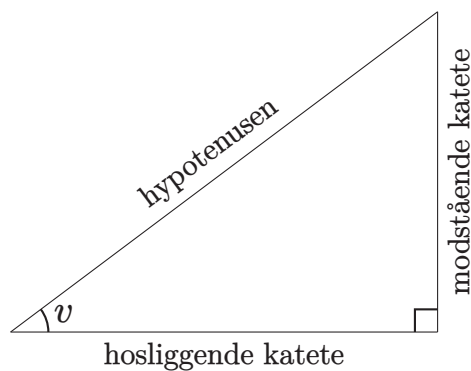
Ekstra

Funktionerne cosinus og sinus adskiller sig på et afgørende punkt i forhold til trekantsberegning. For hver vinkel v mellem $0 < v < 180^\circ$ har cosinus en entydig værdi. Hvis vi f.eks. ved at $\cos(v) = 0,5$, ja så ved vi også at $v = 60^\circ$. Her er det anderledes med sinus. Ved vi f.eks. at $\sin(v) = 0,5$, ja så kan både være 30° og 150° , og når vi bruger sinusrelationerne, kræver det lidt omtanke at finde ud af, hvilken en som er rigtig, eller om begge er mulige. Så selvom sinusrelationerne er hurtigere at bruge (sammenlign øvelse 11.3.3 og i øvelse 11.3.9), så skal man være mere forsigtig med sinusrelationerne.

11.4 Beviser - Trigonometri

Sætning 11.2.2

Betragt den retvinklede trekant:



Der gælder:

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

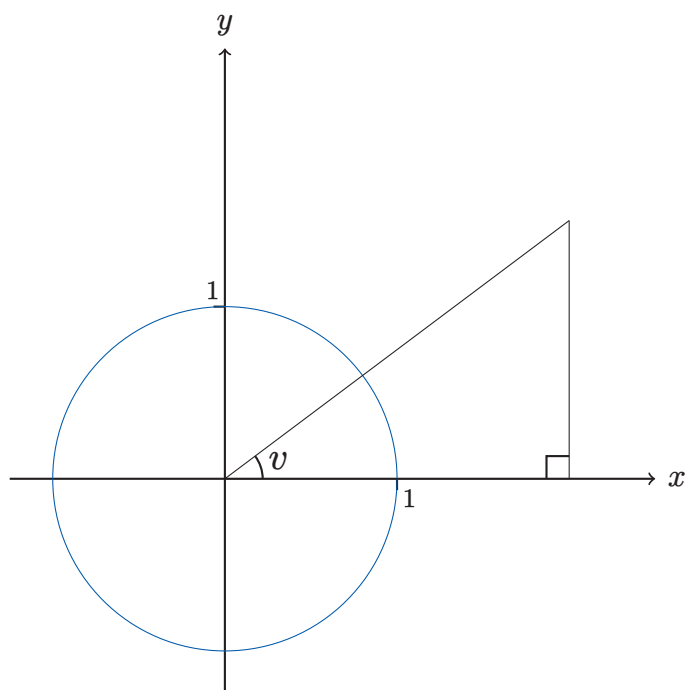
Bevis

Vi vil bevise påstanden (se øvelsen nedenunder for de to andre påstande).

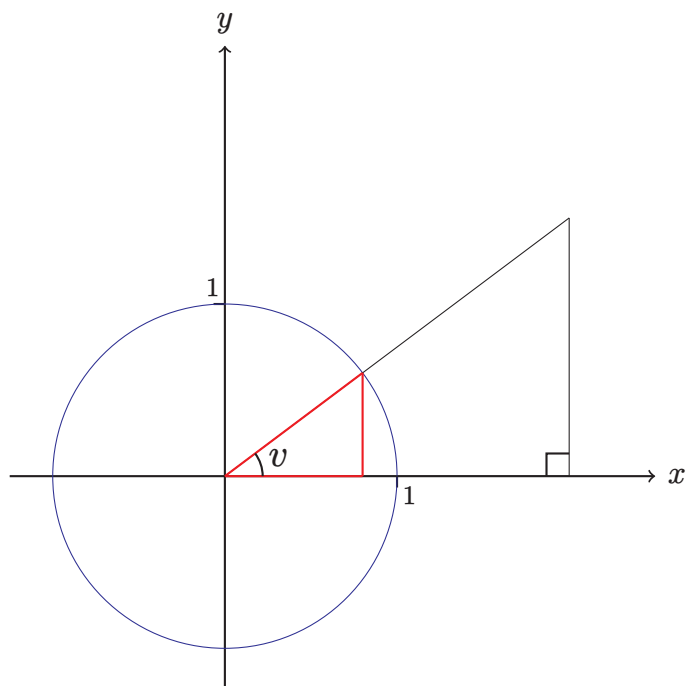
$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi starter med en enhedscirkel og en retvinklet trekant:

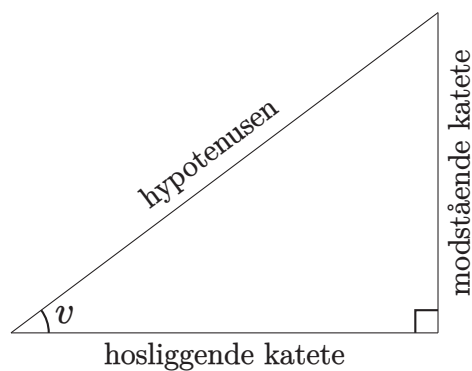
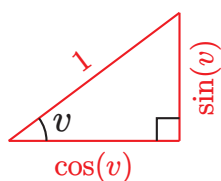
Vi flytter trekanten ind i enhedscirklen som vist her:



Ud fra retningspunktet for v tegner vi endnu en trekant



Vi har nu to ensvinklede trekanter. Da det øverste højre hjørne i den røde trekant er retningspunktet, må trekantens kateter have hhv. længderne $\cos(v)$ og $\sin(v)$. Hypotenusen i den røde trekant må være 1, da det jo er radius i enhedscirklen. Så de to trekanter ser således ud.



Da de to trekanter er ensvinklede kan vi bruge regel 11.1.4. Vi får

$$\frac{\cos(v)}{1} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Vi reducerer og får den ønskede formel

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

Øvelse 11.4.1

Bevis formlerne (fremgangsmåden er tilsvarende den du lige har set.):

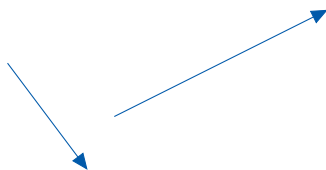
a) $\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$

b) $\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$

Kapitel 12

Vektorer (S)

Vektorregning handler om at regne med pile:



Man bruger vektorer til at beskrive størrelser som f.eks. hastighed, hvor vi ikke kun er interesseret i hvor hurtigt noget er, men også i hvilken retning det bevæger sig.

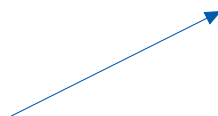
12.1 Introduktion til vektorer

Forestil dig en kugle, der triller hen over en overflade. Hvis du gerne vil beskrive, hvor kuglen er på vej hen, skal du bruge både dens fart og retning. Her er det altså praktisk, at have et matematisk objekt, som kan angive begge dele på en gang. Et sådan objekt kaldes en vektor.

Definition 12.1.1

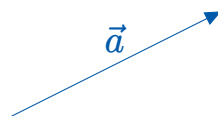
En *vektor* er et objekt, som har både en længde og en retning.

En vektor tegnes som en pil, hvor pilens retning er vektorens retning, og pilens længde er vektorens længde. Her er et eksempel på en vektor:



I forhold til eksemplet med kuglen på overfladen repræsenterer vektorens længde, hvor hurtigt kuglen triller sig (farten), mens vektorens retning fortæller os, i hvilken retning kuglen triller.

Vi betegner vektorer med små bogstaver med pile over.



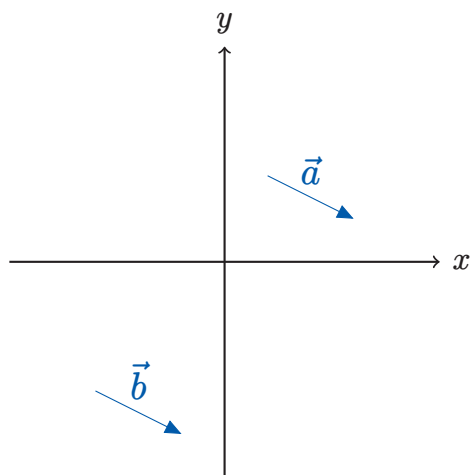
Det ses, at vi nu har givet vores vektor et navn, nemlig $\vec{a}$ (læses "vektor a"). Skriver man i hånden, vil man som regel benytte den lidt "dovne" skrivemåde $\bar{a}$ i stedet for $\vec{a}$.

Længen af $\vec{a}$ betegnes med $|\vec{a}|$, som læses "længden af vektor a". Der findes en særlig vektor som har en længde på nul, men ikke nogen retning. Den kaldes *nulvektoren*, betegnes med $\vec{0}$ og tegnes som en prik:



En vektor som **ikke** er nulvektoren kaldes en *egentlig vektor*.

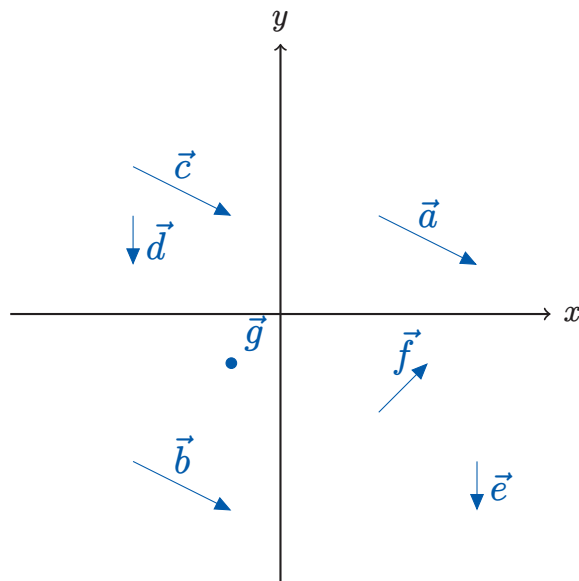
Vi tegner nogle gange vektorer ind i koordinatsystemer.



Her kunne det godt se ud som jeg har tegnet to forskellige vektorer, men fordi $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har samme størrelse og retning, så er de ens. Altså $\vec{a} = \vec{b}$. Man siger at de to pile er to forskellige *repræsentanter* for den samme vektor.

Øvelse 12.1.1

Betragt vektorerne



a) Hvor mange forskellige vektorer er der?

Regning med vektorer

Lad os se på hvordan vi regner med vektorer. Vi starter med addition.

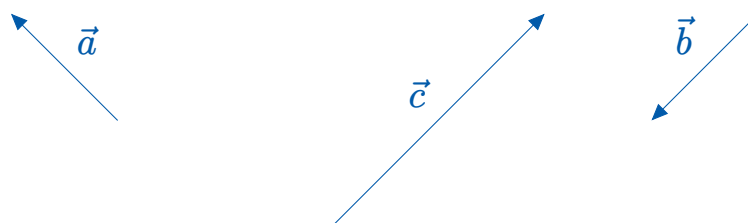
Definition 12.1.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. Vi definerer summen $\vec{a} + \vec{b}$ som den vektor man får, når man tegner $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$ og tegner en pil fra begyndelsen af $\vec{a}$ til slutningen af $\vec{b}$.



Øvelse 12.1.2

Betragt vektorerne



Tegn vektorerne

- a) $\vec{a} + \vec{b}$
- b) $\vec{a} + \vec{c}$
- c) $\vec{b} + \vec{c}$

Har man en vektor, kan man danne en ny vektor ved at sætte et minus foran. Mere præcist:

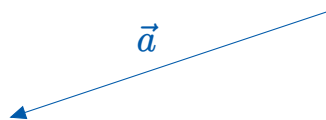
Definition 12.1.3

Lad $\vec{a}$ være en vektor. Ved $-\vec{a}$ forstås den som den vektor, der har samme længde som $\vec{a}$, men modsat retning.



Øvelse 12.1.3

Her er en vektor:



a) Tegn $-\vec{a}$.

Selvom vi skriver $-\vec{a}$ betyder det ikke at vektoren er ”negativ”, det betyder bare at den peger i modsat retning af $\vec{a}$.

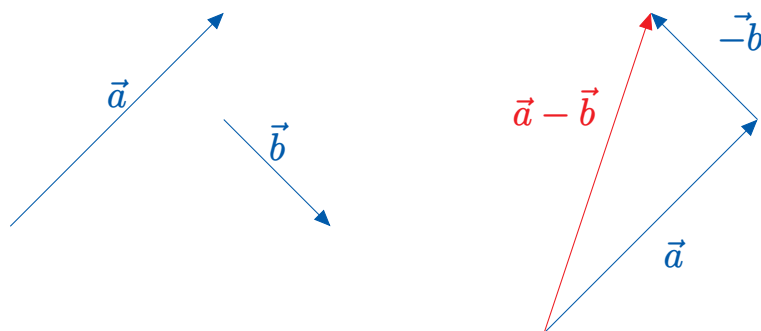
Nu, hvor vi har defineret, hvad $-\vec{a}$ betyder, er der en oplagt måde at definere subtraktion.

Definition 12.1.4

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. Vi definerer $\vec{a} - \vec{b}$ ved

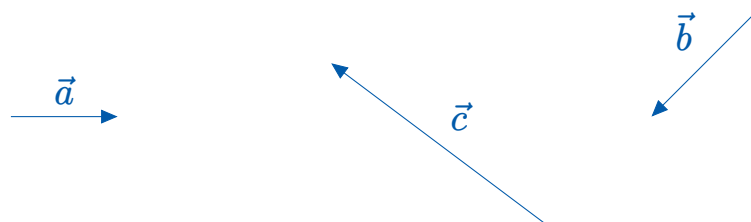
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

.



Øvelse 12.1.4

Betragt vektorerne



Tegn vektorerne

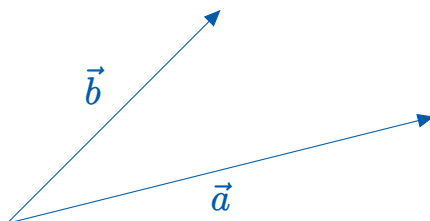
a) $\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{b} - \vec{a}$

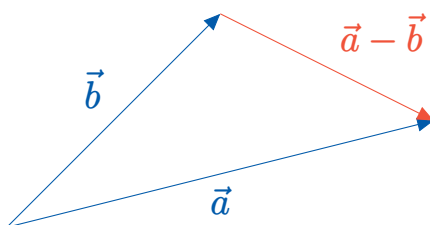
c) $\vec{b} - \vec{c}$

Øvelse 12.1.5

Betragt vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$:



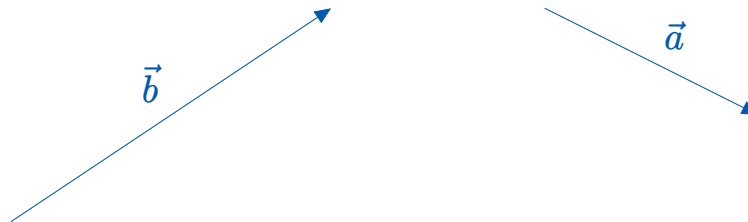
Man kan argumentere for at $\vec{a} - \vec{b}$ går fra spidsen af $\vec{b}$ til spidsen af $\vec{a}$ som vist her:



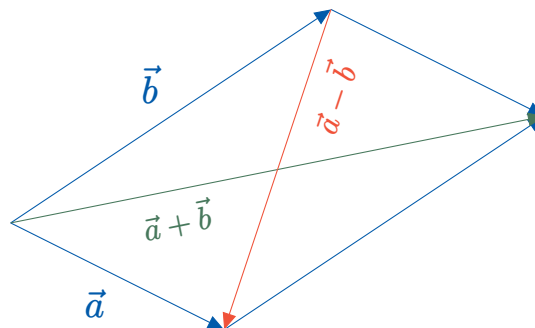
- a) Forklar hvorfor $\vec{a} - \vec{b}$ går fra spidsen af $\vec{b}$ til spidsen af $\vec{a}$

Øvelse 12.1.6

Nogle bøger definere sum og differens af to vektorer lidt anderledes. Givet to vektorer



så defineres $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$ som diagonalerne i det parallelogram som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som vist her:

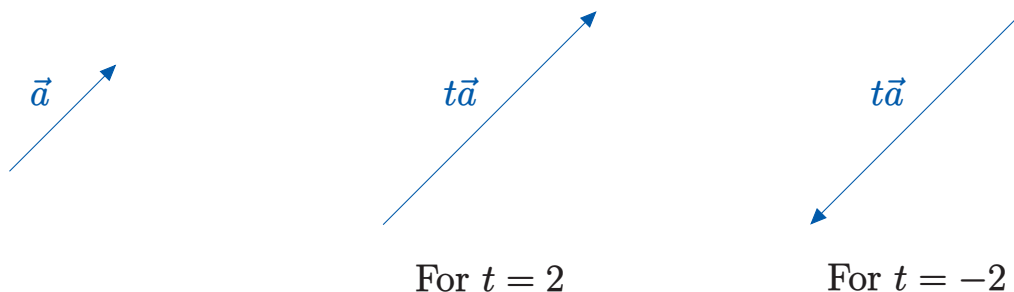


- a) Gør rede for at denne definition giver samme vektor som definitionen fra her på mathhx.

Det var plus og minus, så mangler vi bare gange og dividere, right? Nej, man kan ikke gange eller dividere to vektorer. Men man kan gange en vektor med et tal.

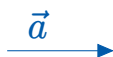
Definition 12.1.5

Lad $\vec{a}$ være en vektor og t være et tal. Vi definerer $t\vec{a}$ som den vektor som har samme retning men er t gange så lang som $\vec{a}$. Er t negativ, så er $t\vec{a}$ modsat rettet $\vec{a}$.



Øvelse 12.1.7

Her er en vektor:



a) Tegn vektoren $-3\vec{a}$

Vi har brug for nogle regneregler for at gøre det nemmere at regne mere komplicerede udtryk.

Sætning 12.1.1

Der gælder følgende regnregler for vektorer

1. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4. $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

5. $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$

6. $1\vec{a} = \vec{a}$

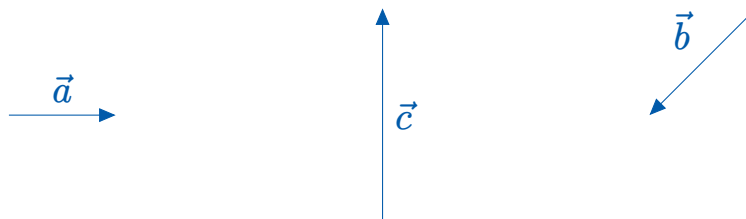
7. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$

8. $(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$

Regnereglerne afspejler dem som vi kender for de reelle tal, og vi bruger sætningen til at sikre os, at vi kan regne med vektorer som om de var tal — altså lige bortset fra, at der ikke findes multiplikation/division mellem vektorer.

Øvelse 12.1.8

Betragt vektorerne



Reducer (ved at bruge regnereglerne) og tegn derefter følgende vektorer:

$$\text{a) } \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{a} - \vec{a} - 3\vec{a}$$

$$\text{b) } \vec{v} = \vec{b} + \vec{a} - 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{0} + \vec{a}$$

$$\text{c) } \vec{w} = \vec{a} + 2(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c}$$

Øvelse 12.1.9

Forklar følgende begreber:

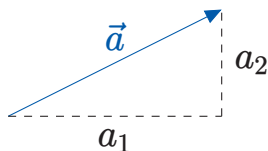
- a) Vektor
- b) Nulvektor
- c) Egentlig vektor
- d) Repræsentant for en vektor.

12.2 Koordinater for vektorer

Indtil videre har der været en masse tegning og ikke så meget regning. Det skal der laves om på! Men skal vi regne med vektorer, er vi nødt til at beskrive dem på en måde, så man kan regne på dem. Det gør vi med koordinater.

Definition 12.2.1

En vektor $\vec{a}$ tildeles koordinater som vist på tegningen:



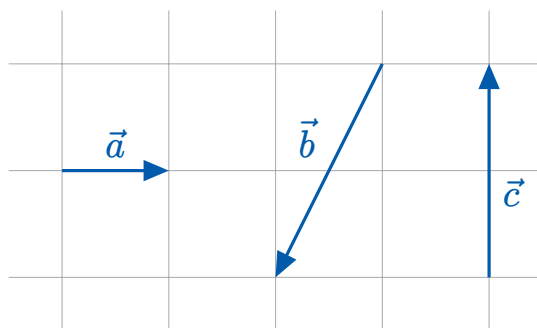
På tegningen er a_1 og a_2 positive. De kan også være negative, så går

vi bare i den modsatte retning.

Vi skriver $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Eksempel 12.2.1

Betragt vektorerne



Vi aflæser at

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Øvelse 12.2.1

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Tegn vektorerne.

Regning med koordinater fungerer helt som forventet:

Sætning 12.2.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Så er

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad t\vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Øvelse 12.2.2 (✚)

Du skal nu tjekke påstanden i ovenstående sætning

- a) Tegn to vilkårlige vektorer og tegn sum, differens, og konstant gange vektor. Indtegn koordinater og tjek, at sætningens påstand er rigtig.

Øvelse 12.2.3

Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Regn:

- a) $\vec{a} + \vec{b}$
b) $\vec{a} - \vec{b}$
c) $2\vec{a}$

Længden af en vektor

Længden af en vektor $\vec{a}$ betegnes med $|\vec{a}|$.

Sætning 12.2.2

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ være en vektor. Så er længden af $\vec{a}$ givet ved:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Øvelse 12.2.4

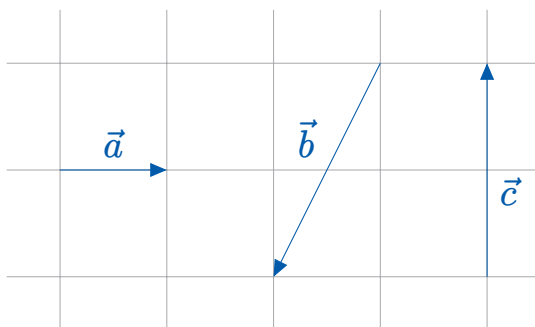
a) Bestem $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right|$

Øvelse 12.2.5

a) Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Bestem a_2 så $|\vec{a}| = 13$

Øvelse 12.2.6

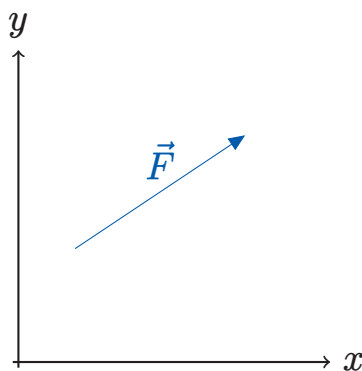
Betragt vektorerne:



- a) Bestem længden af $\vec{a}$.
- b) Bestem længden af $\vec{b}$.
- c) Bestem længden af $\vec{c}$.

Øvelse 12.2.7

Lad $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. En repræsentant for $\vec{F}$ er tegnet ind i et koordinat-system:



Lad θ betegne vinklen mellem F og x -aksen. Du skal nu beregne θ . Jeg hjælper lidt.

- a) Hvad mener jeg mon med vinklen mellem F og x -aksen? Lav en tegning, hvor man kan se den.
- b) Indtegn en retvinklet trekant som du kan bruge til at bestemme θ .
- c) Du kender længden af to trekantens sider. Hvilke?
- d) Beregn θ .

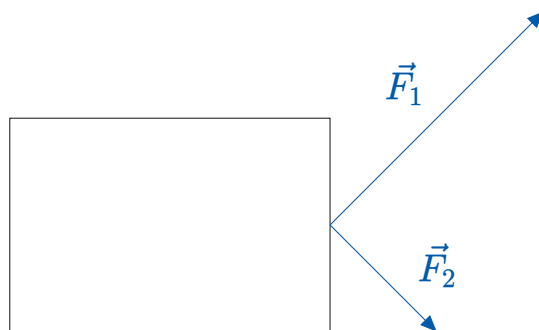
Øvelse 12.2.8

Lad $\vec{a}$ være en egentlig vektor. Antag at vinklen mellem $\vec{a}$ og x -aksen er $53,13^\circ$ og at $|\vec{a}| = 5$.

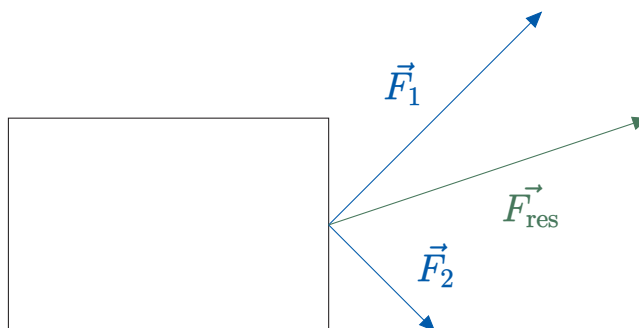
- a) Bestem koordinaterne for $\vec{a}$

Komposanter

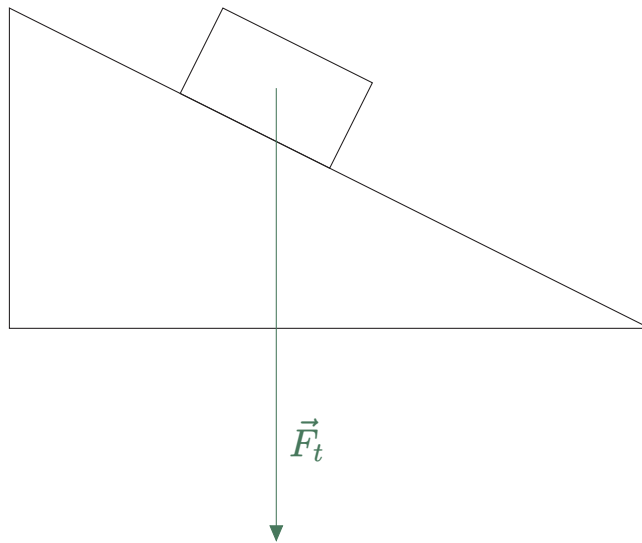
Forstil dig du har en glat klods på en glat overflade. Forstil dig at der bliver trukket i klodsens i to retninger. Vi repræsenterer kræfterne med to vektorer $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$:



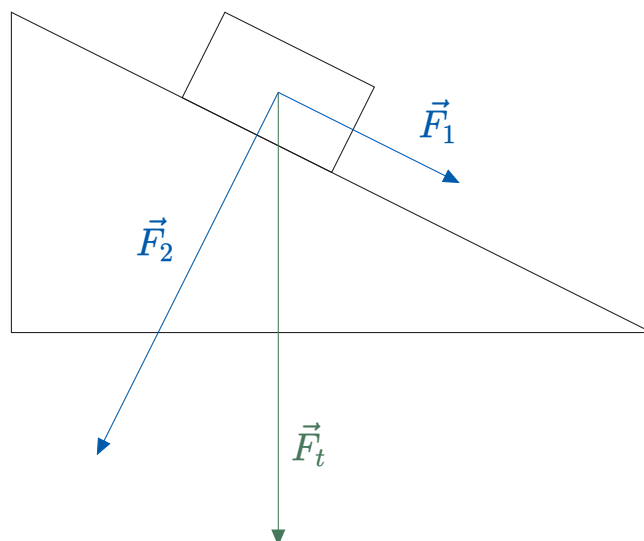
I fysik lærer man, at klodsens vil nu bevæge sig som der kun var en kraft, nemlig summen af de to kræfter $\vec{F}_{\text{res}}$, som vist her:



Dette princip kan man udnytte når man analysere kræfter i fysik. Lad os se på et eksempel, hvor vi nu gang placerer klodsen på et glat skråplan:



Det ses ,at der kun er én kraft som virker på klodsen, nemlig tyngdekraften. Men det er umiddelbart svært at finde ud af, hvordan klodsen bevæger sig, fordi den bevægelse afhænger af skråplanets hældning. Jo stejlere skråplanet er, jo hurtigere vil klodsen glide ned. Vi løser problemet ved at beskrive $\vec{F}_t$ som summen af to kræfter. En der peger langs skråplanet og en, som peger vinkelret ned på skråplanet:



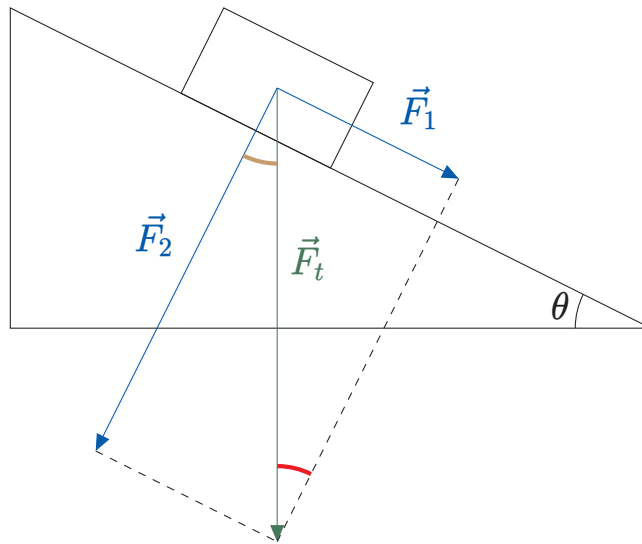
De to vektorer $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ kaldes *komposanter* til $\vec{F}_t$. Komposanter til en vektor $\vec{v}$ er altså vektorer $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, som opfylder, at

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Hvordan man regner klodsens bevægelse ud fra komposanterne $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ er mere fysik end matematik, så det vil jeg overlade til Mogens (eller hvad jeres fysiklærer nu hedder). I stedet skal I regne en øvelse, hvor I får lov at bestemme længderne af de to komposanter.

Øvelse 12.2.9

Betragt klodsen fra før. Lad os kalde hældningsvinklen for θ .



- Gør rede for, at den brune vinkel vinkel er θ .
- Gør rede for, at den røde vinkel er θ .
- Gør rede for, at $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_t| \cdot \cos(\theta)$
- Gør rede for, at $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_t| \cdot \sin(\theta)$

12.3 Skalarprodukt

Vi har set, hvordan man regner sum, differens og ganger vektorer med tal. Reglerne for dette virkede helt naturlige (håber jeg). Prøver man at finde en naturlige måde at definere gange mellem vektorer, får man et problem (prøv selv). I stedet er der forskellige måder, man kan definere en "gangeagtigt" operation. I det følgende vil vi se på en af disse operationer.

Definition 12.3.1

Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Så er *skalarproduktet* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ læses ”vektor a **prik** vektor b”. Så ikke noget med gange. Prik. Man har det med at komme til at sige gange. Det er forbudt. Så prik. Ikke gange. **PRIK**. Vi bemærker at skalarproduktet er et tal — ikke en vektor. Skalarproduktet kaldes også *prikproduktet*.

Det er umiddelbart ikke klart, hvad skalarproduktet udtrykker. Dvs. definition fortæller os, hvordan vi regner det, men ikke hvad det er, vi finder. Vi vil slutte dette afsnit af med en forklaring af dette, men først skal vi regne nogle øvelser.

Øvelse 12.3.1

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Øvelse 12.3.2

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Bestem a_1 så $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Der gælder følgende regneregler for skalarproduktet.

Sætning 12.3.1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være tre vektorer og lad $t \in \mathbb{R}$. Så gælder:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Øvelse 12.3.3

Reducer:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a}$
- b) $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a})$
- c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - |\vec{a}|^2$

Øvelse 12.3.4 (✚)

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

- a) Bevis påstanden (brug regnereglerne, som du brugte i sidste øvelse også).

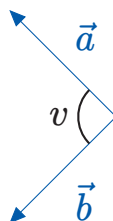
Vi ved at skalarproduktet mellem to vektorer er et tal. Men hvad fortæller det tal mon om de to vektorer? Fortolkningen af skalarproduktet har noget at gøre med vinklen mellem de to vektorer.

Vinklen mellem to vektorer

Antag, at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$:



Vinklen mellem de to vektorer er den vinkel der opstår, når man sætter de to vektorer, så de har samme begyndelsespunkt som vist her:



Der gælder følgende sætning:

Sætning 12.3.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer og lad v være vinklen mellem de to vektorer. Så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$$

Denne sætning er nøglen til at forstå skalarproduktet. Men først skal vi lige lære at bruge den.

Øvelse 12.3.5

Antag, at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som opfylder at $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, og at vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 60° .

- a) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Øvelse 12.3.6

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som opfylder at $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

- a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Øvelse 12.3.7

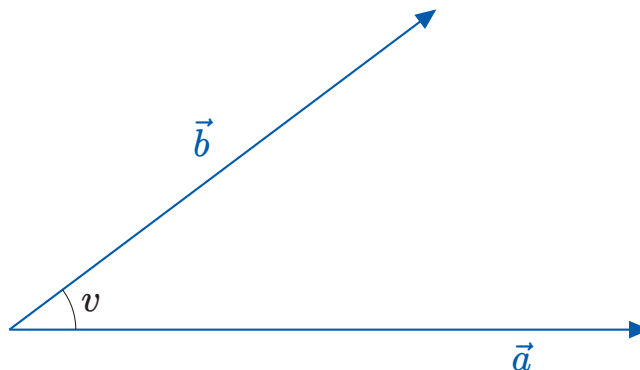
Betragt vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

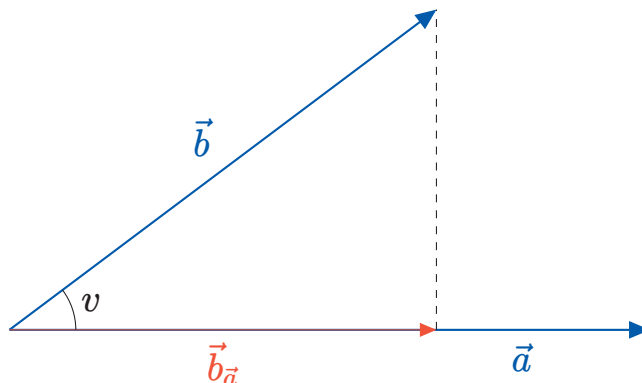
- a) Forklar, hvordan vi kan bruge sætning 12.3.2 til at regne vinklen mellem mellem vektorerne.
- b) Bestem vinklen mellem vektorerne.

Fortolkning af skalarproduktet

Antag at vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor vinklen mellem dem er under 90° :



Vi indtegner nu en vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ kaldet *vektor b's projektion på vektor a* ved at gå fra $\vec{b}$'s slutpunkt til vinkelret ned på $\vec{a}$ som vist her:



Vi vil nu vise at skalarproduktet er givet ved:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}|$$

På tegningen kan vi se en trekant med siderne $\vec{b}$, $\vec{b}_{\vec{a}}$ og den stiplede linje. Vi bruger nu reglen $\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$:

$$\cos(v) = \frac{|\vec{b}_{\vec{a}}|}{|\vec{b}|}$$

Vi ganger med $|\vec{b}|$ på begge sider:

$$|\vec{b}| \cos(v) = |\vec{b}_{\vec{a}}|$$

Vi ganger med $|\vec{a}|$ på begge sider:

$$|\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$$

Ifølge sætning 12.3.2 kan vi erstatte $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$ med $\vec{a} \cdot \vec{b}$, hvilket giver os:

$$|\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Altså har vi vist at $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_{\vec{a}}|$, hvis $v < 90^\circ$.

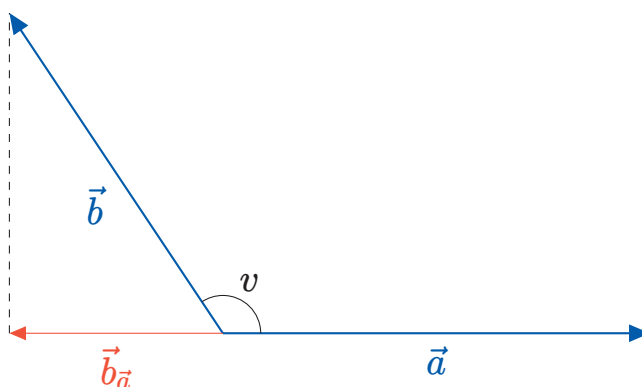
Øvelse 12.3.8

Vi har lige vist at når $v < 90^\circ$ er $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_\vec{a}|$. Du skal i denne øvelse vise at det resultat også gælder når $v = 90^\circ$.

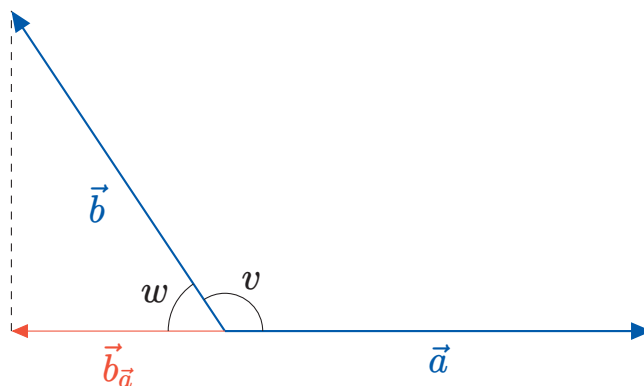
Antag, at du har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som står vinkelret på hinanden.

- a) Hvad er $|\vec{b}_\vec{a}|$?
- b) Bestem $|\vec{a}| |\vec{b}_\vec{a}|$
- c) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Brug sætning 12.3.2.
- d) Gælder $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_\vec{a}|$ også når $v = 90^\circ$?

Når $v > 90^\circ$ ser projektionen således ud:



Vi indtegner vinklen mellem $\vec{b}$ og $\vec{b}_\vec{a}$:



Som før bruger vi reglen $\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$, men denne gang på vinklen w :

$$\cos(w) = \frac{|\vec{b}_a|}{|\vec{b}|}$$

Vi ganger med $|\vec{b}|$ på begge sider:

$$|\vec{b}| \cos(w) = |\vec{b}_a|$$

Vi ganger med $|\vec{a}|$ på begge sider:

$$|\vec{a}| |\vec{b}_a| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(w)$$

Vinklerne v og w er supplementvinkler, så $w = 180^\circ - v$:

$$|\vec{a}| |\vec{b}_a| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(180^\circ - v)$$

Vi bruger nu overgangsformlen $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$ (tegn en enhedscirkel og tjek det):

$$|\vec{a}| |\vec{b}_a| = |\vec{a}| |\vec{b}| (-\cos(v))$$

Vi ganger med -1 på begge sider:

$$-|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$$

Ifølge sætning 12.3.2 kan vi erstatte $|\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$ med $\vec{a} \cdot \vec{b}$, hvilket giver os:

$$-|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Altså har vi vist at $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$, hvis $v > 90^\circ$.

Vi konkluderer, at *skalarproduktet mellem to vektorer er længden af den første vektor ganget med længden af den andens vektors projektion på den første, dog med negativt fortegn, hvis vinklen mellem de to er større end 90° .*

Øvelse 12.3.9

Tegn vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Regn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ud fra formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$ og din tegning ,

Øvelse 12.3.10

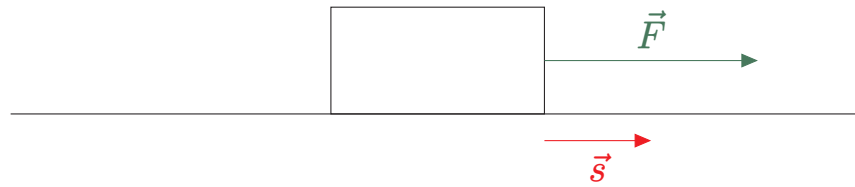
Tegn vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Kom med et ca. bud på skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved hjælp af aflæsning på din tegning og formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}|$.

Anvendelse af skalarproduktet

Vi skal nu se et eksempel på, hvor skalarproduktet dukker op i fysik. Antag, at vi har en kraft $\vec{F}$, som trækker i en klods langs en glat overflade. Det stykke klodsens flytter sig, kan vi repræsentere med en vektor $\vec{s}$.

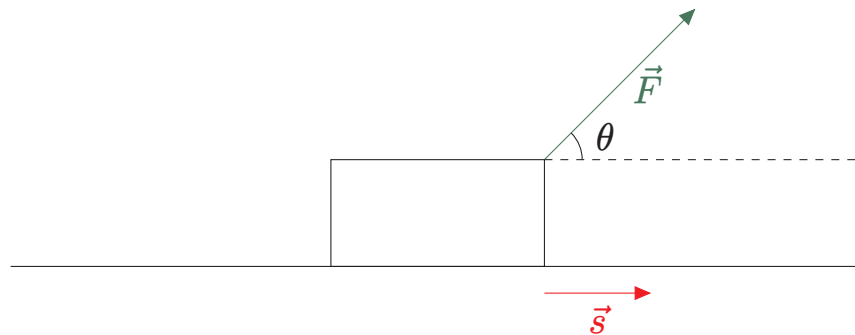


I fysik taler vi om *kraftens arbejde*, som udtrykker den energi kraften har overført til klodsens. Man kan i ovenstående tilfælde regne arbejdet A ved:

$$A = |\vec{F}| |\vec{s}|$$

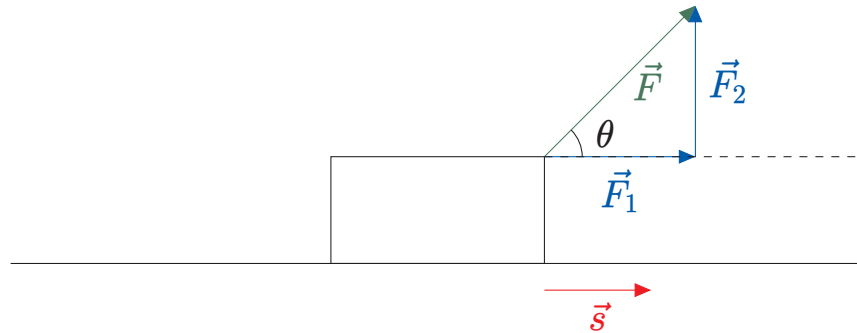
Det giver god mening, at den overførte energi er proportional med kraften og det stykke klodsens bliver trukket. Trækker vi den f.eks. dobbelt så langt, ja så må vi have overført dobbelt så meget energi.

Nu ændrer vi på situationen, så vi i stedet trækker skråt i klodsens:



Det er klart at vi spilder nogle af vores kræfter i denne situation, nemlig den del af kraften som går op ad. Vi opdeler nu kraften i to

komposanter.



Det er klart at $\vec{F}_2$ næppe kan bidrage til klodsens energi, da klodsen ikke bevæger sig i lodret retning. Så i dette tilfælde regner man arbejdet ved:

$$A = |\vec{F}_1| |\vec{s}|$$

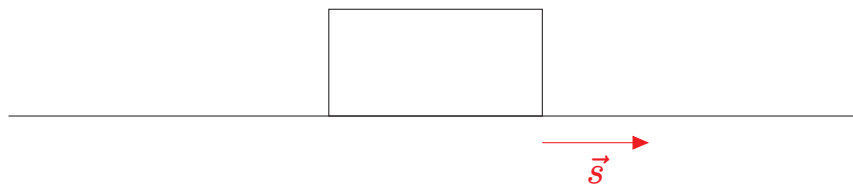
Men, hvad står der her? Vektoren $\vec{F}_1$ er jo $\vec{F}$'s projektion på s , så:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Det er denne formel man vil møde, når man møder begrebet arbejde i fysik efter gymnasiet. Formlen gælder uanset, hvilken retning $\vec{s}$ og $\vec{F}$ peger.

Øvelse 12.3.11

Betragt formelen for arbejde $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ i forbindelse med vores klods der bevæger sig mod højre:



Antag at vi har en kraft på klodsen som er på 10 N og at $s = 2$ m.

Du skal nu regne arbejdet i tre forskellige situationer. Jeg kan afsløre at SI-enheden for arbejde er J (det er overført energi).

Brug formelen $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$, og regn ved hovedregning (undtagen i spørgsmåld, her må du godt bruge computer). Overvej om resultaterne virker fornuftige.

- Antag at $\vec{F}$ peger mod højre.
- Antag at $\vec{F}$ peger lodret op.
- Antag at $\vec{F}$ peger mod venstre.
- Antag at $\vec{F}$ peger skråt op mod højre, så kraften danner en vinkel $\theta = 30^\circ$ med bevægelsesretningen.

Hvilken smuk måde at afslutte science-forløbet på mathhx.

12.4 Beviser - Vektorer

Sætning 12.3.1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være tre vektorer og lad $t \in \mathbb{R}$. Så gælder:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Bevis

Vi får brug for at regne på vektorernes koordinater så lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Vi beviser den første regel, nemlig at $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Vi beviser reglen ved at regne hver side af lighedstegnet for sig, og så sammenligne resultaterne.

Vestre side først:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Så højre side

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2$$

Vi kan se at de to sider er ens. Se nedenstående øvelse for resten af beviset.

I de følgende øvelser skal du bevise resten af sætning 12.3.1. Du kan bruge samme fremgangsmåde som i beviset for den 1. regneregul.

Øvelse 12.4.1

- a) Bevis den 2. regneregul i sætning 12.3.1.

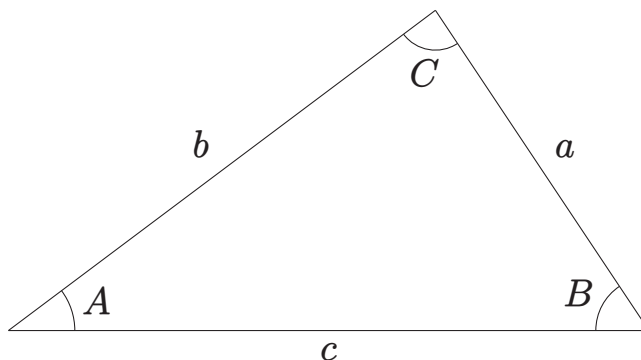
Øvelse 12.4.2

- a) Bevis den 3. regneregul i sætning 12.3.1.

Øvelse 12.4.3

a) Bevis den 4. regneregul i sætning 12.3.1.

I det næste bevis skal vi bruge en resultat for trekanter kaldet *cosinusrelationerne*. Hvis vi har en vilkårlig trekant:



så gælder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Det hedder cosinusrelationerne, fordi vi kan skrive tilsvarende ligninger op for de andre sider. Vi vil ikke bevise cosinusrelationerne, så vi må håbe de er rigtige.

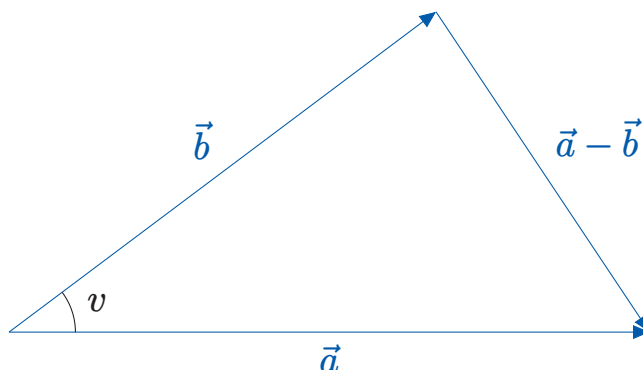
Sætning 12.3.2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer og lad v være vinklen mellem de to vektorer. Så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$$

Bevis

Vi starter med at tegne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$:



Vi regner nu $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ med to metoder.

Første metode: Vi bruger regnereglen: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Anden metode: Vi bruger cosinusrelationerne:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

De to røde resultater fra de to metoder er begge lig med $|\vec{a} - \vec{b}|^2$, derfor må de være ens:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Vi trækker $|\vec{a}|^2$ og $|\vec{b}|^2$ fra på begge sider

$$-2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

og dividerer med -2 på begge sider

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

og det var det vi ville vise.

Facitliste

1.1.1

- a) Ja
- b) Nej

1.1.2

- a) $F(x) = x^2 + x$
- b) $F(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^6 + 2x$

1.1.3

- a) $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

1.1.4

- a) $F(x) = 2x^2 - x + 2$

1.1.5

- a) $F(x) = e^x + x^2 - 8$

1.1.6

a) $F(x) = x - \ln(|x|) + c$

b) $c = 1$

c) $F(x) = x - \ln(|x|) + 1$

1.2.1

a) 5^x

b) x

c) c

1.2.2

a) $\int 2x \, dx = x^2 + c$

b) $\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + c$

1.2.3

a) $\int 2t^4 \, dt = \frac{2}{5}t^5 + c$

b) $\int \sqrt{u} + 10 \, du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 10u + c$

1.2.4

a) Vi bruger regel 2 og får $\int x^2 + 2x \, dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$

b) Vi bruger regel 1 og får $\int 5e^x \, dx = 5e^x + c$

c) Vi bruger først regel 3, så regel 2 og til sidste regel 1 og får $\int 4x^3 + 5^x - 1 \, dx = x^4 + \frac{5^x}{\ln(5)} - x + c$

d) Vi skriver først integralet som $\int 5\frac{1}{x} \, dx$. Så bruger vi regel 1 og får $\int 5\frac{1}{x} \, dx = 5 \ln(|x|) + c$

1.3.1

- a) Ja det giver det samme.
- b) Det betyder ikke noget hvilken en stamfunktion man vælger da de kun afviger fra hinanden med en konstant og denne konstant går ud når man regner $F(b) - F(a)$.

1.3.2

- a) $\int_2^3 3x^2 dx = 19$
- b) $\int_{-2}^5 (6t - 2) dt = 49$
- c) $\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,72$
- d) $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{u} du = -1$
- e) $\int_2^{-1} 5 dx = -15$

1.3.3

- a) $\int_{-1}^5 f(x) dx = 18,13$.

1.3.4

- a) $\int_2^7 3 \cdot f(x) dx = 30$
- b) $\int_4^7 f(x) - 2 dx = -3$
- c) $\int_7^2 f(x) dx = -10$
- d) $\int_5^5 f(x) dx = 0$
- e) $\int_2^4 f(x) dx = 7$

1.4.1

a) $\int (x^3 - 1)^2 \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3 - 1)^3 + c$

b) $\int e^{2x+1} \cdot 2 dx = e^{2x+1} + c$

c) $\int 4x \cdot \sqrt{2x^2 + 1} dx = \frac{2}{3}(2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$

d) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx = e^{\sqrt{x}} + c$

1.4.2

a) $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$

b) $\int 2^{3x+1} dx = \frac{2^{3x+1}}{3\ln(2)} + c$

c) $\int \frac{12x}{3x^2+1} dx = 2\ln(|3x^2 + 1|) + c$

1.4.3

a) $\int_{-2}^2 (x^2 - 1)^7 \cdot 2x dx = 0$

b) $\int_{-1}^3 e^{-2x+3} dx = 74,18$

c) $\int_2^8 \frac{2\sqrt{\ln(x)}}{x} dx = 3,23$

1.4.4

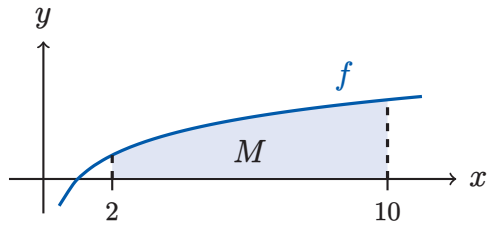
a) Kuk kuk?

1.5.1

a) $A = \frac{7}{6} \approx 1,17$

1.5.2

a)

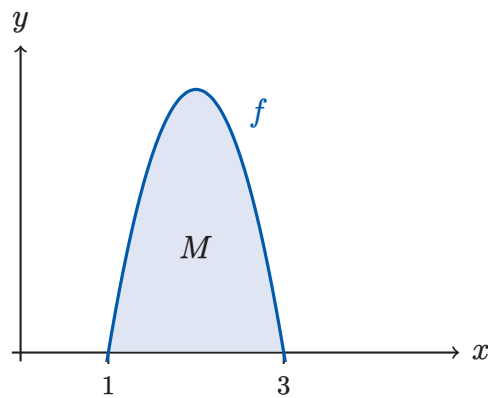


b) $A = 13,64$

1.5.3

a) $x_1 = 1, x_2 = 3$

b)



c) $A = 4$

1.5.4

a) $k = 9$

1.5.5

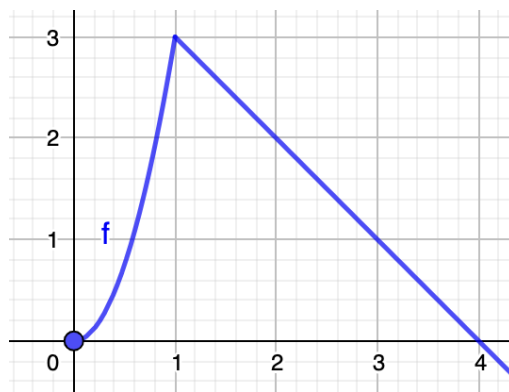
a) $k = \ln(4) \approx 1,39$

1.5.6

a) $q = 3$

1.5.7

a)



b) $A = 5,5$

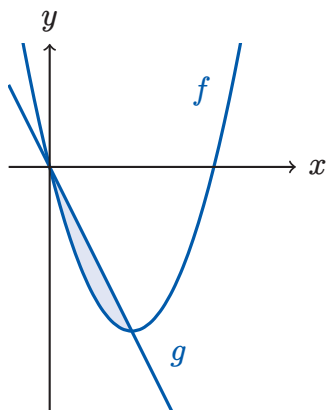
1.5.8

a) $x_1 = -2$ og $x_2 = 2$

b) $A = \frac{32}{3} \approx 10,67$

1.5.9

a) Det markerede område er M :

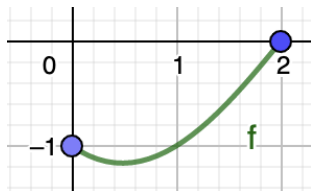


b) $A = \frac{4}{3} \approx 1,33$

1.5.10

a) $x_1 = 2$.

b) Graf:



c) $A = 1,66$

d) Ja det passer da meget godt.

1.5.11

a) Arealet er 3,28.

1.5.12

- a) Du skal faktorisere. Sæt x ud foran en parentes og brug nulreglen.
- b) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 1$
- c) Arealet er $\frac{5}{2} = 2,5$

1.5.13

- a) Arealet er 5.

1.5.14

- a) $\int_0^{1,5} f(x) dx \approx 1$
- b) $\int_{1,5}^3 f(x) dx \approx -1$
- c) $\int_{-3}^3 f(x) dx \approx 0$
- d) $\int_3^{1,5} f(x) dx \approx 1$

1.5.15

- a) $\int_{-4}^{-2} (-2x^3 e^x - 1) dx \approx 3$
- b) $\int_{-9}^{-5} (-2x^3 e^x - 1) dx \approx -1$
- c) $\int_{-5}^{-9} (-2x^3 e^x - 1) dx \approx 1$

1.6.1

- a) $F(x) = e^x \cdot (x - 1)$

1.6.2

- a) $\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x+1} (x+1) + c$

1.6.3

a) $F(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

1.6.4

a) $\int_3^7 \frac{\ln(x)}{x} dx = 1,29$

1.6.5

a) $A = 1,47$

1.6.6

a) Arealet er 3,08

1.6.7

a) Kommandoen hedder **NLøs**. Forskellen er at **Løs** forsøger at finde en eksakt løsning (f.eks. på form som en brøk eller en kvadratrodd), mens **NLøs** finder en decimaltalsløsning (f.eks. "2,45"). Kommandoen **Løs** er finere, hvis man er en rigtig matematiker, men det vi jo ikke, så bare brug **NLøs**.

b) $k = 0,69$

1.6.8

a) Punktmængden M har et areal på 0,44

1.7.1

a) Du viser den til mig.

1.7.2

a) Vis mig det.

1.7.3

a) **Regel 3:** Vi skal vis at

$$\int (f(x) - g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

Vi differentierer højresiden:

$$\left(\int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx \right)'$$

Vi opdeler differentiationen i to:

$$\left(\int f(x) \, dx \right)' - \left(\int g(x) \, dx \right)'$$

Differentiation ophæver integration:

$$f(x) - g(x)$$

og vi har altså vist at $\int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$ er stamfunktion $f(x) - g(x)$, så regel 2 er bevist.

1.7.4

a) Du forklarer det til mig.

1.7.5

a) Fremlæg dem for mig

2.1.1

- a) Differentialligning
- b) Differentialligning
- c) Ikke en differentialligning
- d) Ikke en differentialligning

2.1.2

- a) Ikke løsning
- b) Er løsning
- c) Ikke løsning
- d) Er Løsning

2.1.3

- a) f er løsning.
- b) f er løsning.
- c) f er ikke løsning.
- d) f er løsning.

2.1.4

- a) $k = 3$

2.1.5

- a) $a = -8$.

2.1.6

- a) Jes
- b) yesssss

2.1.7

- a) ...
- b) ...
- c) ...

2.1.8

- a) Yes du.

2.2.1

- a) $y = 3x + c$
- b) F.eks. $f(x) = 3x$ og $g(x) = 3x + 1$

2.2.2

- a) $y = c \cdot e^{5x}$
- b) $y = \frac{2}{3} + c \cdot e^{-3 \cdot x}$
- c) $y = \frac{100}{1 + c \cdot e^{-400x}}$
- d) $y = x \ln(x) + c$

2.2.3

a) $y = -\frac{3}{2} + c \cdot e^{2x}$

b) $y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + c$

2.2.4

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

2.2.5

a) $f(x) = 3e^{7x}$

b) $f(x) = \frac{400}{3e^{-800x} + 1}$

2.2.6

a) $f(x) = 10e^{3x}$

b) $f(x) = 11e^x - 9$

c) $f(x) = \frac{(4x+8)^{11}}{44}$

d) $f(x) = \frac{30}{2e^{-20x} + 3}$

2.3.1

a) $y = \frac{1}{c-x^2}$ måske har I $y = \frac{1}{-c-x^2}$ eller $y = -\frac{1}{c+x^2}$. Det er også i orden.

2.3.2

a) $y = \ln(e^x + c)$

2.3.3

a) $y = \sqrt[3]{x^2 + c}$

2.3.4

a) $y = \frac{1}{2} \ln(3x^2 + c)$. Måske har du $y = \frac{1}{2} \ln(3x^2 + 2c)$, hvilket også er i orden.

2.3.5

a) $y = \frac{1}{c - \frac{1}{2}x^2}$

b) $y = \frac{-2}{x^2 - 6}$. Måske har du $y = \frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}$, hvilket også er ok.

2.3.6

a) $y = -\sqrt{2e^x + 14}$

2.3.7

a) $y = 6e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x} - 5$. Måske har I $y = e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(6)} - 5$, hvilket også er ok.

b) $y = 4e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x} - 5$. Måske har I $y = e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(4)} - 5$, hvilket også er ok.

2.3.8

a) $y = -2\sqrt{x^3 - 4}$ eller måske har du $y = -\sqrt{4x^3 - 16}$, hvilket også er ok.

b) $y = -11e^{-x} + 4$

c) $y = x^4 + 2x^2 + 1$

2.3.9

a) $y = -2\sqrt{x^3 - 4}$, $x > \sqrt[3]{4}$

b) $y = -11e^{-x} + 4$, $x \in \mathbb{R}$

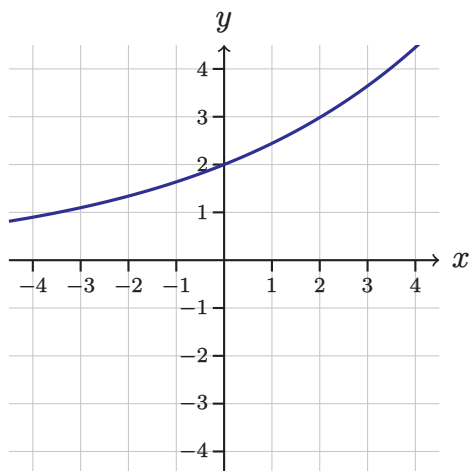
c) $y = x^4 + 2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

d) $y = -x^2 + 1$, $-1 < x < 1$

2.4.1

a) $y = ce^{\frac{1}{5}x}$

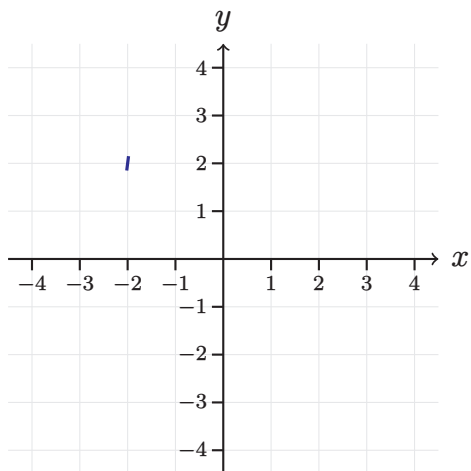
b) Løsningskurve gennem punktet $P(0, 2)$:



2.4.2

a) $(-2, 2; 8)$

b) Linjeelement gennem $P(-2, 2)$:



2.4.3

a) $(2, -3; 0)$

2.4.4

a) $(\frac{1}{4}, 1; 2)$

2.4.5

a) $y = 4x + 14.$

2.4.6

a) $y = 3x - 13$

2.4.7

a) $y = 2x - 11$

2.4.8

a) $(4, 0; 3)$

b) $y = 3x - 12$

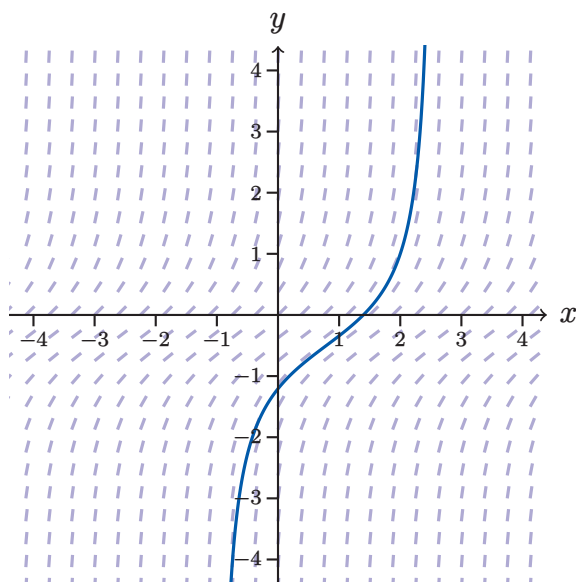
2.4.9

a) $y = x - 1$.

b) Det er det selvfølgelig.

2.4.10

a) Løsningskurve:



2.4.11

a) Den sidste. Altså $y' = x \cdot y^2$

2.5.1

a) $s(t) = c \cdot e^t - 2t - 2$

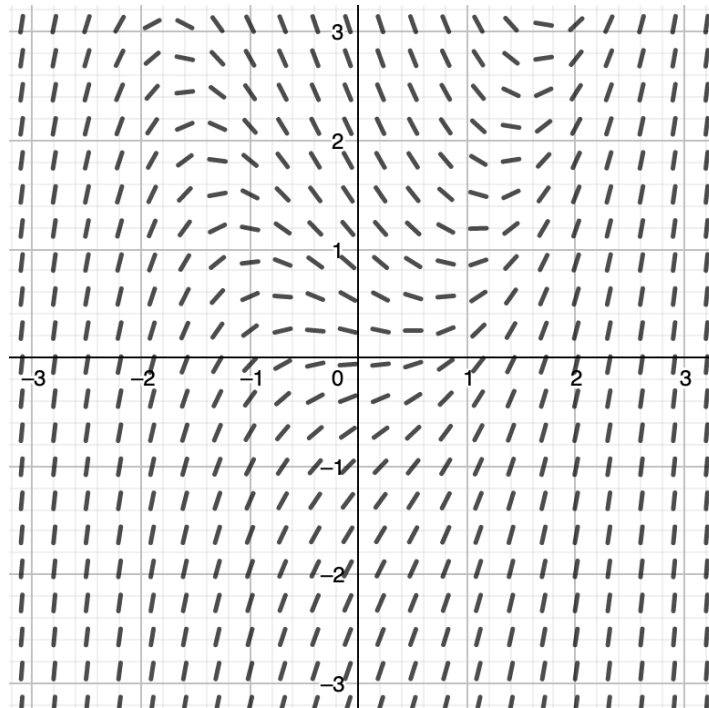
b) $s(t) = 6e^t - 2t - 2$

2.5.2

a) $y = c \cdot e^{-x} + x^2 - 2x + 2$

b) $y = x^2 - 2x - 3e^{-x} \cdot e^3 + 2$

c)



2.6.1

a) $f(x) = 1000e^{0,2x}$

2.6.2

- a) Hvis $y \ll M$, så er $M - y \approx M$, så $y' = a \cdot y(M - y)$ bliver til $y' \approx a \cdot y \cdot M$
- b) $a = 0,000002$
- c) $g(x) = \frac{100000}{1+99e^{-0,2x}}$

2.6.3

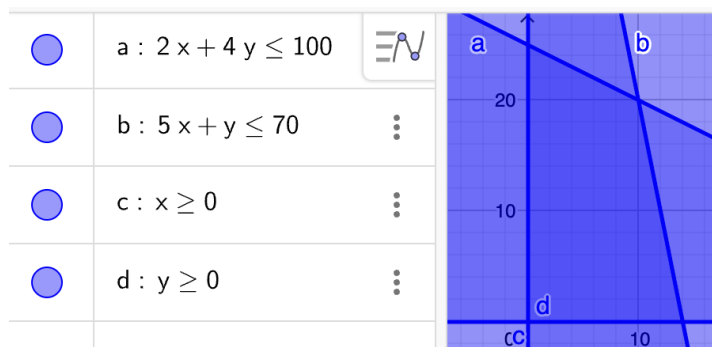
- a) Som du også fandt ud af i øvelse 2.6.1, så er $M - y \approx M$, når $y \ll M$. Så ligningen kan skrives som $y' = a \cdot y \cdot M$. Denne ligning har form som $y' = k \cdot x$, som har løsningen $y = c \cdot e^{k \cdot x}$, der jo er en eksponentiel funktion.
- b) Når y nærmer sig M , vil $M - y \approx 0$ og ligningen kan skrives som $y' = 0$, dvs. at når y er meget tæt på M , er væksten meget tæt på 0, og funktionen bliver tilnærmelsesvis konstant. Altså nærmer funktionen sig linjen $y = M$.

3.1.1

a)

	PRODUKT A	PRODUKT B	Til rådighed
Arbejdstimer	2 timer	4 timer	100 timer
Råmateriale	5 kg	1 kg	70 kg
Dækningsbidrag	10 kr.	8 kr.	

- b) x er antal producerede PRODUKT A og y er antal producerede PRODUKT B.
- c) $f(x, y) = 10x + 8y$
- d) Polygonområdet er det mørkeste blå område.



- e) Virksomheden skal producere 10 PRODUKT A og 20 PRODUKT B, hvilket giver et dækningsbidrag på 260 kr., hvilket ikke er meget, men der er jo også bare et eksempel, så du kan lære metoden.

3.1.2

- a) Virksomheden skal stadig producere 10 PRODUKT A og 20 PRODUKT B og vil så få et dækningsbidrag på 360 kr.
- b) Virksomheden skal så producere 14 PRODUKT A og ingen PRODUKT B og vil så få et dækningsbidrag på 840 kr.

3.1.3

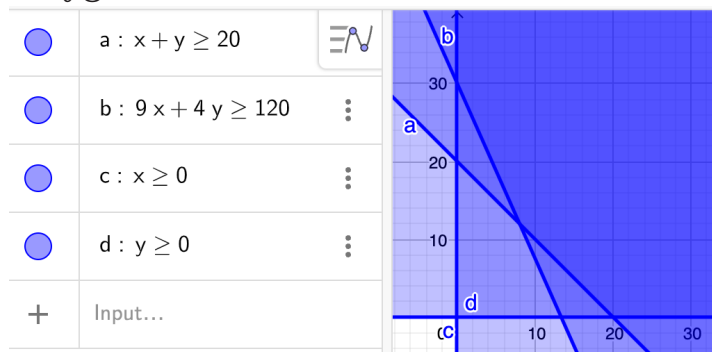
a)

	Miniskumbananer	Piratos	Minimumskrav
Antal	1	1	20
Vægt	9 g	4 g	120 g
Omkostninger	2 kr.	0,5 kr.	

b) x er antal miniskumbananer i posen og y er antal piratos.

c) $f(x, y) = 2x + 0,5y$

d) Polygonområdet er det mørkeste område:



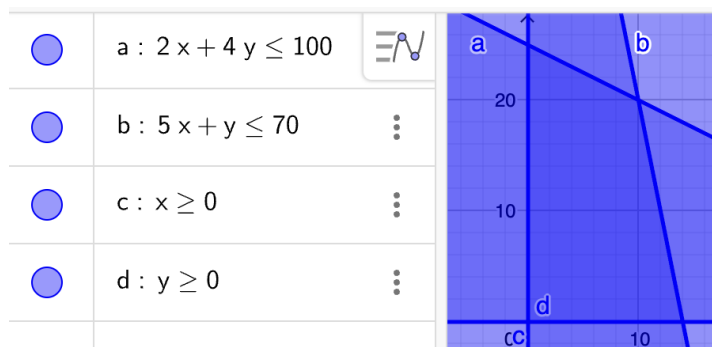
- e) Hun skal putte 30 piratos i hver pose og det vil kosten hende 15 kr. pr. pose.
- f) Hun skal putte 8 miniskumbananer og 12 piratos i hver pose og det vil koste hende 34 kr.

3.2.1

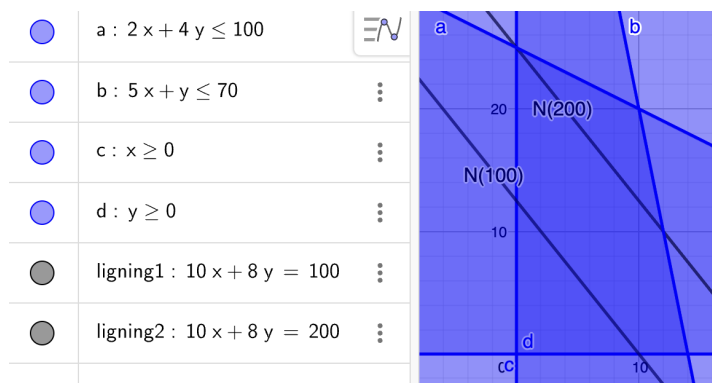
a)

	PRODUKT A	PRODUKT B	Til rådighed
Arbejdstimer	2 timer	4 timer	100 timer
Råmateriale	5 kg	1 kg	70 kg
Dækningsbidrag	10 kr.	8 kr.	

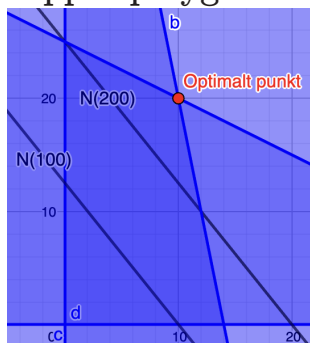
x er antal producerede PRODUKT A og y er antal producerede PRODUKT B. Forskriften er $f(x, y) = 10x + 8y$ og polygonområdet er det mørkeste blå område.



b)



- c) Vi kan se at niveauerne vokser i retning skråt til højre.
- d) Ved at parallelforskyde niveaulinjerne skråt til højre indtil de slipper polygonområdet fås det optimale punkt:



- e) Det optimale punkt har koordinaterne (10, 20).

- f) Virksomheden skal producere 10 PRODUKT A og 20 PRODUKT B, og det maksimale dækningsbidrag 260 kr.

3.2.2

- a) (10, 20)
b) (14, 0)
c) (0, 25)

3.2.3

a)

	Miniskumbananer	Piratos	Minimumskrav
Antal	1	1	20
Vægt	9 g	4 g	120 g
Omkostninger	2 kr.	0,5 kr.	

- b) x er antal miniskumbananer i posen og y er antal piratos.
c) $f(x, y) = 2x + 0,5y$
d) Hun skal putte 30 piratos (og ingen miniskumbananer) i hver pose og det vil koste hende 15 kr. pr. pose.
e) Hun skal putte 8 miniskumbananer og 12 piratos i hver pose og det vil koste hende 12 kr.

3.3.1

- a) 1. nej, 2. nej.
- b) 1. ja, 2. ja.
- c) 1. ja, 2. ja
- d) 1. ja, 2. nej. Hvis du skal have Mat-A vil du møde den slags funktioner under kvadratisk programmering.

3.3.2

- a) $f(2, 3) = -1$

3.3.3

- a) Det gør det ikke. Det opfylder 2 af de 3 uligheder.
- b) Det betyder at det er umuligt at producerer 9 VARE A og 3 VARE B. Typisk pga. manglende ressourcer.

3.3.4

- a) $2x + 4y + 1 = 0$
- b) Jes den er god nok.
- c) $f(x_0, y_0) = 95$.

3.4.1

- a) Hun skal putte 30 piratos i hver pose og det vil koste hende 15 kr. pr. pose.
- b) Hun skal putte 8 miniskumbananer og 12 piratos i hver pose og det vil koste hende 12 kr. pr. pose.
- c) Hun skal putte 20 miniskumbananer i hver pose og det vil koste hende 5 kr. pr. pose.

3.5.1

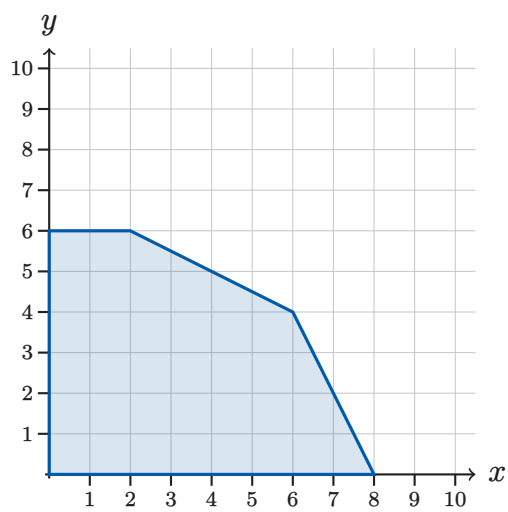
- a) Der skal produceres 6 af hvert produkt.
- b) Dækningsbidraget for OMEGALUL skal lægge imellem 20 kr. pr. stk. og 40 kr. pr. stk., hvis den optimale produktion skal være uændret.
- c) Dækningsbidraget for OMEGALUL må falde med 10 kr. pr. stk. eller stige med 10 kr. pr. stk., hvis dækningsbidraget skal være uændret.
- d) Dækningsbidraget for KEKW må falde med 5 kr. pr. stk. eller stige med 10 kr. pr. stk., hvis dækningsbidraget skal være uændret.

3.5.2

- a) Hun skal putte 30 piratos i hver pose.
- b) Hvis prisen på skumbananer falder med mere end 87 øre, skal hun begynde at putte skumbananer i posen også.
- c) Hvis prisen på piratos stiger med mere end 38 øre, skal hun begynde at putte skumbananer i posen også.

4.1.1

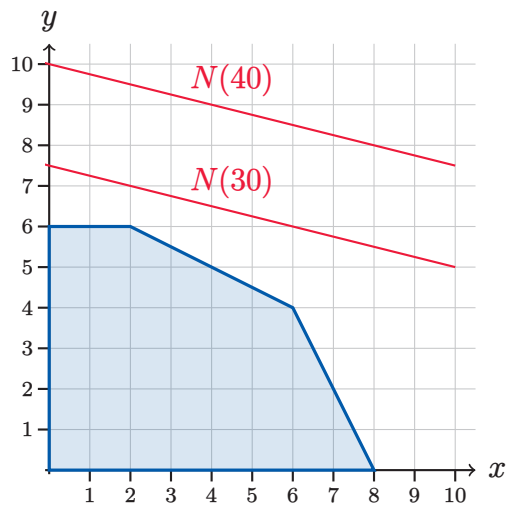
a)



4.1.2

a) $x + 4y = 40$

b)

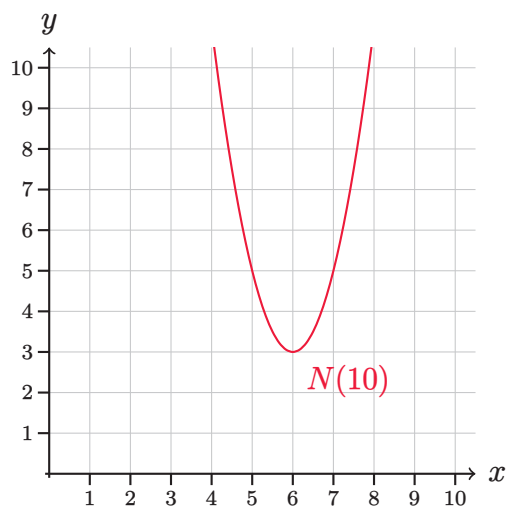


c) Maksimumspunktet er $(2,6)$.

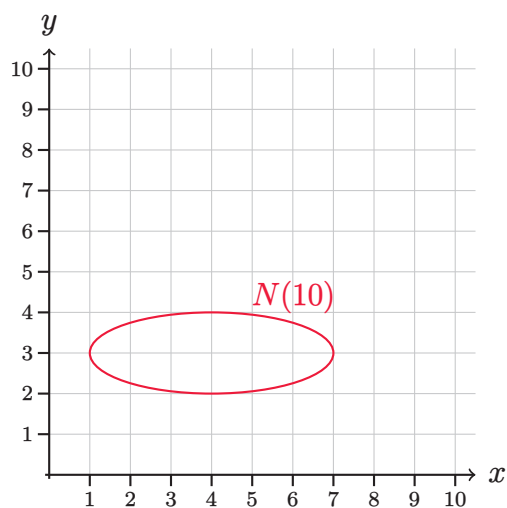
d) Maksimumsværdien er 26.

4.1.3

a) Parabel:



b) Ellipse:

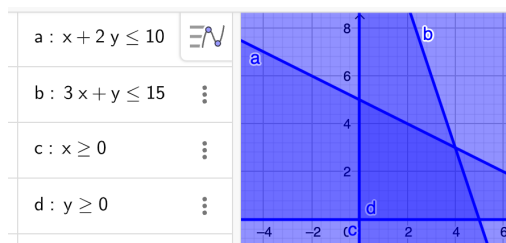


4.1.4

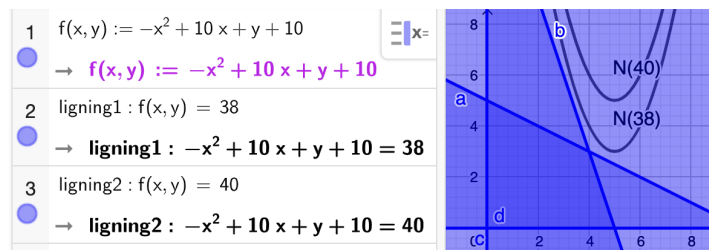
- a) Cirkel
- b) Ellipse
- c) Parabel

4.2.1

a) Polygonområdet er det mørkeste område:



b) Det er et CAS-vindue, jeg har skrevet i.



c) Jeg har valgt den dovne løsning med skæringsværktøjet:

☒	a: $x + 2y = 10$	⋮
☒	b: $3x + y = 15$	⋮
☐	A = Skæring(a, b)	⋮
	= (4, 3)	

d)

1	$f(x, y) := -x^2 + 10x + y + 10$	$\equiv$ x=
☒	$\rightarrow f(x, y) := -x^2 + 10x + y + 10$	
2	ligning1 : $f(x, y) = 38$	
☒	$\rightarrow$ ligning1 : $-x^2 + 10x + y + 10 = 38$	
3	ligning2 : $f(x, y) = 40$	
☒	$\rightarrow$ ligning2 : $-x^2 + 10x + y + 10 = 40$	
4	$f(4, 3)$	
☐	$\rightarrow$ 37	

4.2.2

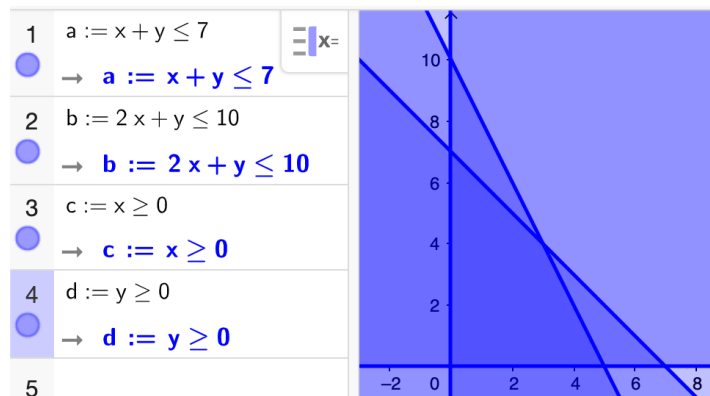
- a) Minimum er 11 og maksimum er 81
- b) Minimum er -9 og maksimum er 36

4.2.3

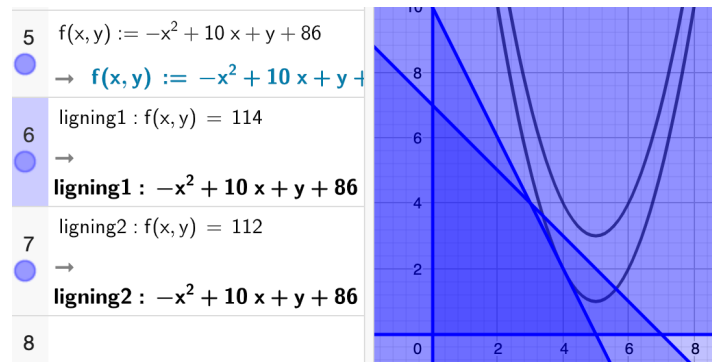
- a) Minimumspunktet er $(2, 4)$ og minimumsværdien 16.
- b) Maksimumspunktet er $(0, 0)$ og maksimumsværdien er 40

4.2.4

- a) Polygonområde er det mørkeste område:



- b) Den øverste er $N(118)$ og den nederste er $N(112)$. Jeg prøvede mig frem for at finde to gode niveauer:

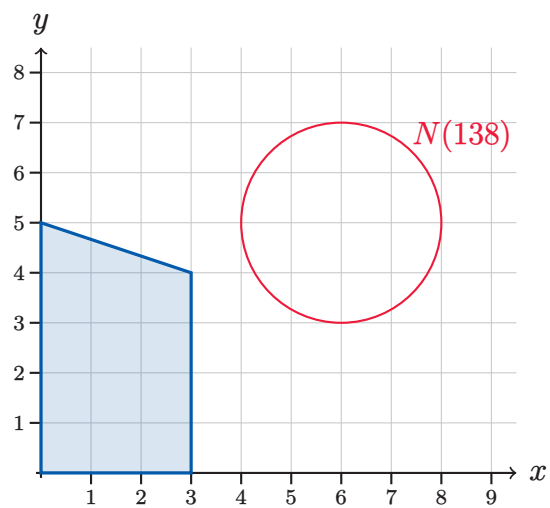


c) (4, 2)

d) 112

4.3.1

a)

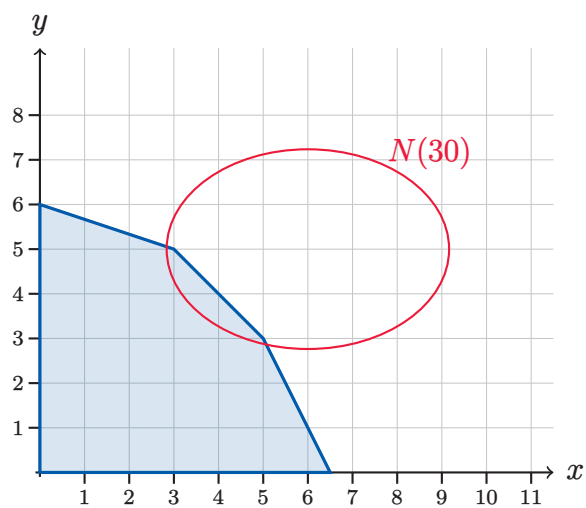


b) (3, 4)

c) 130

4.3.2

a)

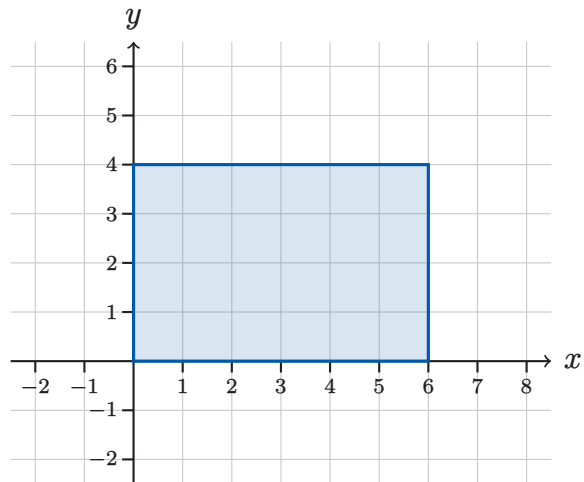


b) (4,4)

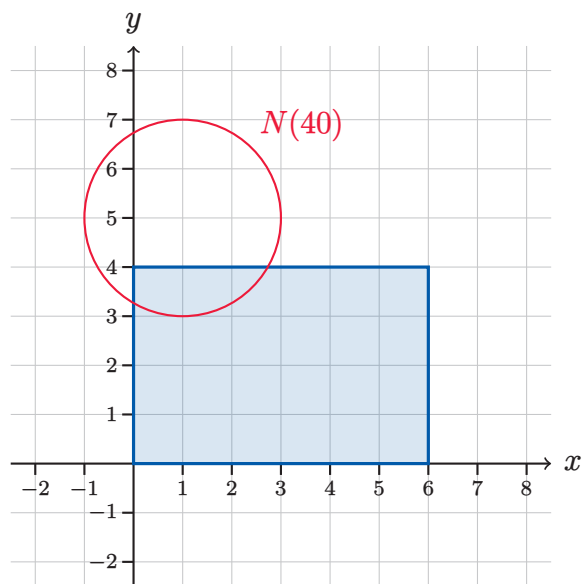
c) 26

4.3.3

a)



b)

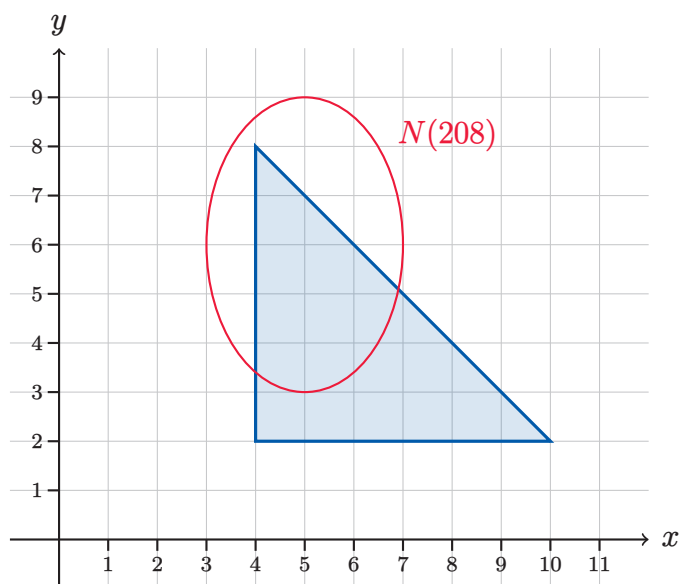


- c) Det frie maksimum er 44 i punktet $(1, 5)$
 d) Maksimum indenfor polygonområdet er 43 i punktet $(1, 4)$

e) Minimum indenfor polygonområdet er -6 i punktet $(6, 0)$.

4.3.4

a)



b) Minimum for f er 100

4.4.1

a) $x^2 + 9 + 6x$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $4q^2 + 4aq$

4.4.2

Må jeg se?

4.4.3

a) $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

c) $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

d) $x^2 - ax = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$

e) $x^2 - \frac{b}{a}x = (x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

4.4.4

a) $x^2 - 10x + 5 = (x - 5)^2 - 20$

b) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

4.4.5

a) $2x^2 - 4x = 2(x - 1)^2 - 2$

b) $\frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}$

c) $ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$

4.4.6

a) $4x^2 - 24x + 4 = 4(x - 3)^2 - 32$

b) $cy^2 + dy + e = c(y + \frac{d}{2c})^2 - \frac{d^2}{4c} + e$

4.5.1

a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

4.5.2

- a) Isolerer vi y , får vi $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Det er en lineær funktion, så det er ikke en parabel (husk at vi kræver at $a \neq 0$ i parablens ligning)

4.5.3

- a) nope

4.5.4

- a) Koefficienten a viser om parabelen er konveks (glad) eller konkav (sur). Er a positiv er den konveks, ellers er den konkav. Derudover viser a hvor "spids" grafen er. Er a tæt på nul er parabelen meget flad.

Koefficienten b har betydning for placeringen af grafen. Helt konkret viser den tangentens hældning i skæringspunktet med y -aksen.

Koefficienten c er angiver det sted hvor grafen skærer y -aksen. Men se kommentarer efter øvelsen.

4.5.5

- a) De har samme form, men den anden er forskudt med 5 nedad i forhold til den første.

4.6.1

- a) $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 9$
b) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
c) $x^2 + y^2 = 1$

4.6.2

- a) Centrum er $(7, 4)$ og radius er 5
- b) Centrum er $(-1, 3)$ og radius er 1
- c) Centrum er $(3, 0)$ og radius er 2

4.6.3

- a) Det gør det ikke.

4.6.4

- a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$

4.6.5

- a) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$
- b) $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$

4.6.6

- a) Centrum er $(2, -1)$ og radius er 4.
- b) Centrum er $(5, 0)$ og radius er 10.

4.6.7

- a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

4.6.8

- a) $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$
- b) $(x - 2.5)^2 + (y - 1)^2 = 6^2$

4.6.9

- a) Centrum er $(-2, \frac{1}{3})$ og radius er 2.

4.7.1

- a) Den vandrette halvakse er 1, den lodrette halvakse er 2 og centrum er i punktet $(4, 2)$.
- b) Den halve storakse er 2, den halve lilleakse er 1.
- c) $a = 1$, $b = 2$, $x_0 = 4$ og $y_0 = 2$

4.7.2

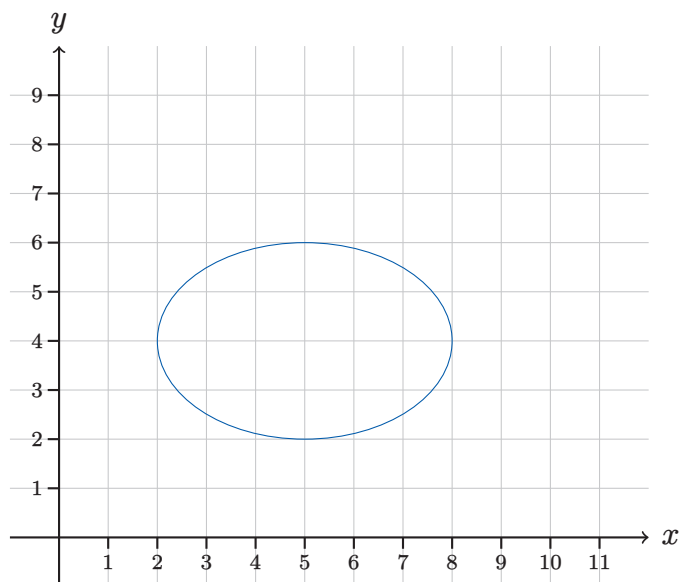
- a) Centrum er $(9, 14)$, den vandrette halvakse er 5, den lodrette halvakse er 4.
- b) Centrum er $(3, -2)$, den vandrette halvakse er 3, den lodrette halvakse er 6.
- c) Centrum er $(5, 0)$, den vandrette halvakse er $\sqrt{5}$, den lodrette halvakse er 9.
- d) Centrum er $(0, 0)$, den vandrette halvakse er 1, den lodrette halvakse er 2.

4.7.3

- a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
- b) $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y - 8 = 0$
- c) Det gør det ikke.

4.7.4

a)



4.7.5

a) En cirkel. En cirkel er altså en særlig slags ellipse.

4.7.6

a) Vis mig det.

b) Halvakserne er radius.

4.7.7

- a) Centrum er i $(3, 1)$, vandret halvakse er 4 og lodret halvakse er 2.
- b) Centrum er i $(-1, 3)$, vandret halvakse er 2 og lodret halvakse er 5.
- c) Centrum er i $(-2, -7)$, vandret halvakse er 1 og lodret halvakse er 3.
- d) Centrum er i $(2, 0)$, vandret halvakse er 2 og lodret halvakse er 1.

4.8.1

- a) $y = 3x^2 - 2$
- b) $y = 3x^2 - 4 + \frac{1}{3}t$
- c) Vi ser at $N(t)$ er en parabel da ligningen har formen $y = ax^2 + bx + c$.

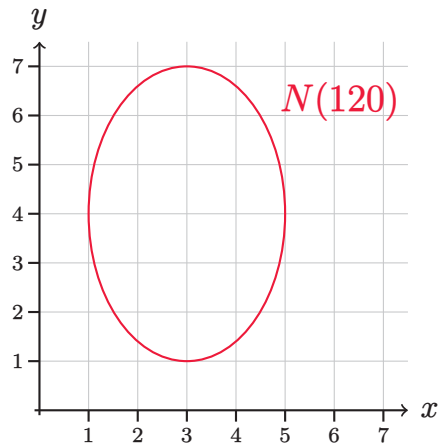
4.8.2

- a) Ved at taste ligningen ind i GeoGebra og højreklikke kan den omskrives til ellipseform:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

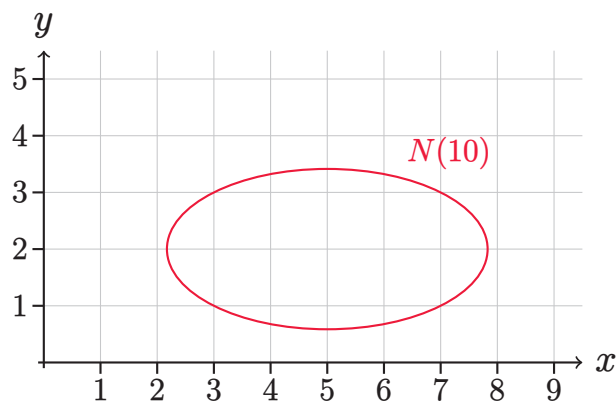
Altså er niveaukurven en ellipse.

- b) Centrum er $(3, 4)$, den vandrette halvakse er 2 og den lodrette halvakse er 3.
- c)



4.8.3

- a) Vi regner m og får 18. Da $a < 0$ og $c < 0$ kan vi ud fra sætning 4.8.2 konkludere at niveaukurverne $N(t)$ er ellipser for $t < 18$
- b) Da $10 < 18$ og $N(t)$ er en ellipse for $t < 18$, må $N(10)$ være en ellipse.
- c)



4.8.4

- a) Minimum
- b) $(5, 5)$.
- c) 0.

4.8.5

- a) Niveaukurverne er ellipser, men ikke cirkler, så a og c har samme fortegn, men er forskellige. Funktionen har et frit minimum, så $a > 0$ og $c > 0$.
- b) Niveaukurverne er parabler, så $c = 0$. Da et højt niveau svarer til en lav placering (langs y-aksen) af parablen, må $d < 0$. Da der er tale om konvekse niveaukurver, har a og d forskelligt fortegn, hvilket betyder, at $a > 0$
- c) Niveaukurverne er parabler, så $c = 0$. Da et højt niveau, svarer til en lav placering (langs y-aksen) af parablen må $d < 0$. Da der er tale om konkave niveaukurver har a og d samme fortegn, hvilket betyder at $a < 0$
- d) Niveaukurverne er cirkler, så a og c er ens. Funktionen har et frit maksimum, så $a < 0$ og $c < 0$.

4.9.1

- a) Vis mig det.

4.9.2

- a) Det meste er en gentagelse af argumenterne. Men det er nok klarest, hvis jeg gentager hele beviset og så markere de steder der er anderledes:

Antag **nu**, at $a < 0$, $c < 0$ og $t < m$.

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved.

$$f(x, y) = t.$$

Forskriften for f kan ifølge sætning 4.9.1 skrives som:

$$a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 + m = t.$$

Vi trækker m fra på begge sider

$$a(x - x_0)^2 + c(y - y_0)^2 = t - m.$$

Vi deler nu med $t - m$. Det kan vi gøre, fordi vi ved, at $t < m$, og dermed kan $t - m$ ikke være nul.

$$\frac{a(x - x_0)^2}{t - m} + \frac{c(y - y_0)^2}{t - m} = 1.$$

Vi forkorter den første brøk med a og den anden med c . Det kan vi gøre, fordi ved ved at a og c ikke er nul (vi har antaget, at de er mindre end nul):

$$\frac{(x - x_0)^2}{\frac{t-m}{a}} + \frac{(y - y_0)^2}{\frac{t-m}{c}} = 1.$$

Da $t < m$, er $t - m < 0$ og da også $a < 0$ og $c < 0$, er brøkerne $\frac{t-m}{a}$ og $\frac{t-m}{c}$ også positive (**minus divideret med minus giver**

plus). De kan derfor skrives som kvadratrødder i anden:

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{t-m}{a}}\right)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{t-m}{c}}\right)^2} = 1.$$

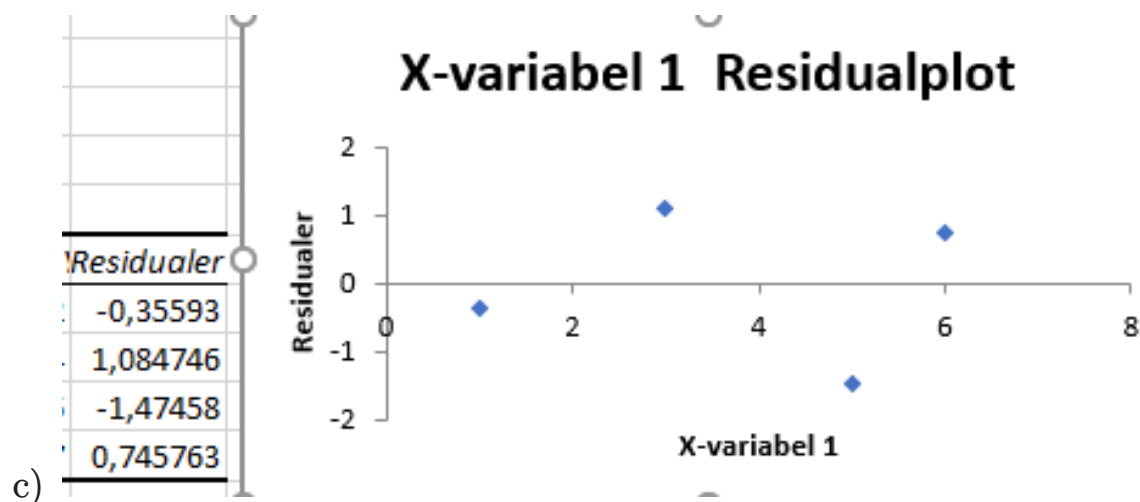
Og der har vi den. Ellipsens ligning. Niveaukurven $N(t)$ er altså en ellipse med centrum i $(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{2c}\right) = C$, vandret halvakse $\sqrt{\frac{t-m}{a}}$ og lodret halvakse $\sqrt{\frac{t-m}{c}}$.

Når der vælges en højere værdi af t , kommer $t - m$ tættere på nul, og dermed bliver halvakserne $\sqrt{\frac{t-m}{a}}$ og $\sqrt{\frac{t-m}{c}}$ også mindre. Ud fra udtrykkene for halvakserne ses det også, at halvakserne bliver ens, hvis $a = c$ og vi har allerede set (se øvelse 4.7.6) at en ellipse med ens halvakser er en cirkel.

5.2.1

a) $y = 0,78x + 1,58$

b) $R^2 = 0,69$



d) $[-2,89; 4,45]$

5.4.1

	Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3
Kolonne 1	1		
Kolonne 2	-0,35624	1	
Kolonne 3	0,190937	0,046533	1

a)

b) Nej Der er ikke korrelation mellem de forklarende variable.

5.5.1

a) Vi har følgende model:

$$\hat{y} = 2,0 + 0,35x_1 - 14x_2,$$

hvor $\hat{y}$ er den forventede karakter, x_1 er tiden brugt på lektier og x_2 er fraværet. Pga. antallet af observationer er det svært at sige om residualerne er normalfordelte samt om variansen er konstant, men det ser ok ud. Vi kan se at residualerne har en middelværdi på 0. Da der ikke er tale om en tidsserie undersøger vi ikke for uafhængighed mellem residualer. Der er ikke korrelation mellem de to forklarende variable. Da vi yderligere har en høj determinationskoefficient konkluderer vi, at vi har fundet en model som beskriver data godt.

5.6.1

a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 1$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -1$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2y^2$ og $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2x^3y$

5.6.2

De partielle afledede er:

a) $\frac{\partial}{\partial a}f(a, b) = 2 + b^2$ og $\frac{\partial f}{\partial b}f(p, q) = 2ab$

b) $\frac{\partial}{\partial p}f(p, q) = -3$ og $\frac{\partial}{\partial q}f(p, q) = e^q$

5.6.3

a) $(-5, -5)$

b) $(1, 0)$

c) $(0, -1)$

5.6.4

a) $\frac{\partial}{\partial a}f(a, b) = 10a - 8b + 22$ og $\frac{\partial}{\partial b}f(a, b) = -8a + 10b - 50$.

b) $(5, 9)$.

5.7.1

a) $f(a, b) = (-a - b + 4)^2 + (-2a - b + 2)^2 + (-4a - b + 5)^2$

b) $\frac{\partial}{\partial a}f(a, b) = 42a + 14b - 56$

$$\frac{\partial}{\partial b}f(a, b) = 14a + 6b - 22$$

c) $y = 0,5x + 2,5$

5.7.2

a) $f(a, b) = (-b)^2 + (-a - b + 1)^2 + (-2a - b + 4)^2 + (-3a - b + 5)^2$

b) $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 28a + 12b - 48$

$\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 12a + 8b - 20$

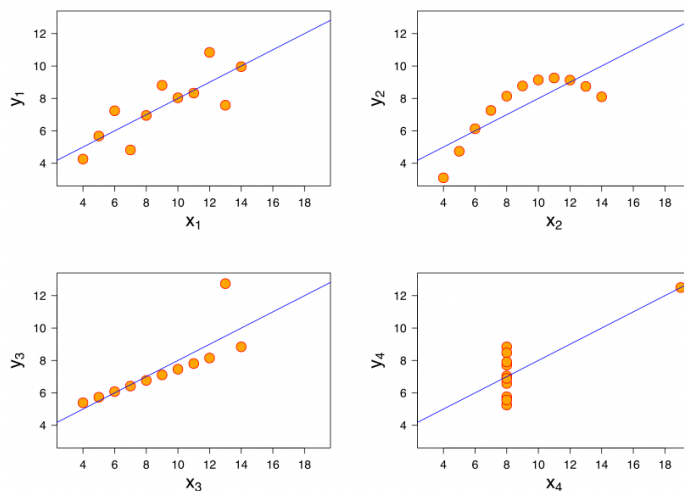
c) $y = 1,8x - 0,2$

d)

x_i	y_i	e_i
0	0	0,2
1	1	-0,6
2	4	0,6
3	5	-0,2

5.8.1

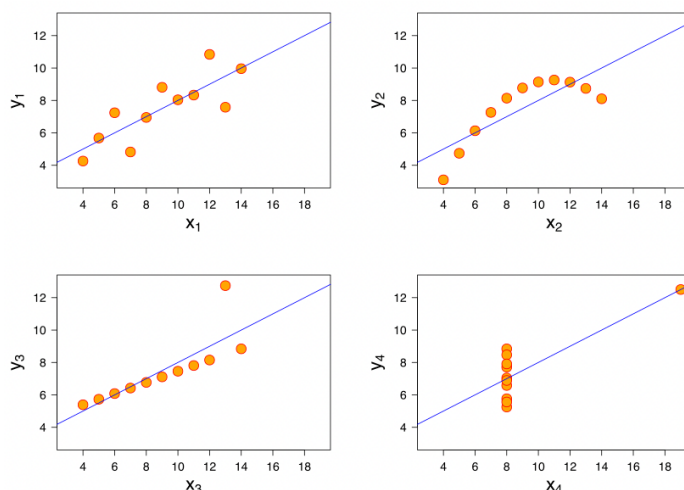
a) Følgende regressionsmodeller har ifølge artiklen samme R^2 :



Vi ser at data i det øverste højre hjørne følger en parabel, og beskrives derfor dårligt med den lineære model. Data øverst

til venstre er til gengæld godt beskrevet med en lineær model. De har samme R^2 og det må betyde at vi har brug for mere end R^2 til at vurdere om vi har fat i den rigtige model.

- b) Selvom R^2 er lav kan der godt være en klar lineær tendens. Data fra artiklen har $R^2 = 0,67$, hvilket jo ikke er super højt, men der er en klar lineær tendens i modellen øverst til venstre og derfor er det rimeligt at beskrive data med den lineære model.



5.8.2

- a) $R^2 = 0,25$, hvilket betyder at 25% af variationen i y -værdierne kan forklæres ved hjælp af modellen.

6.1.1

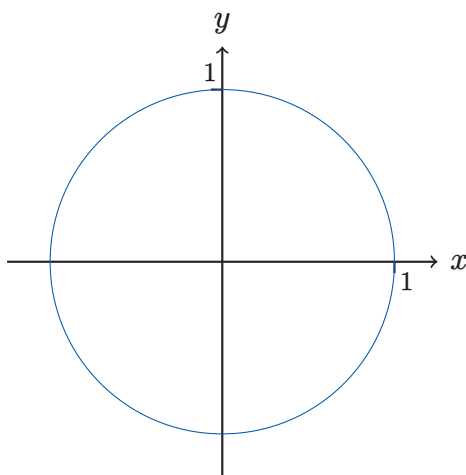
- a) Det er en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius $r = 1$.

6.1.2

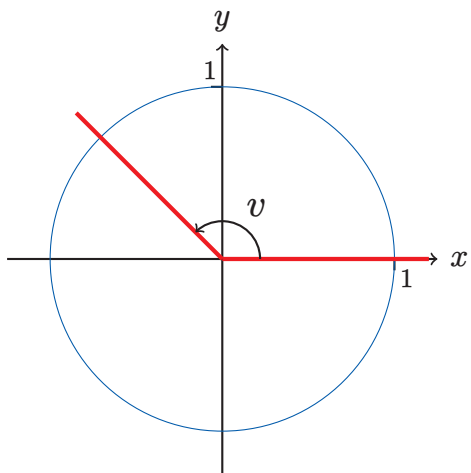
- a) Vi ved at omkredsen af en cirkel er bestemt ved formelen $O = 2\pi r$ og da radius i enhedscirklen er 1, må enhedscirklesn omkreds være $O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

6.1.3

a)

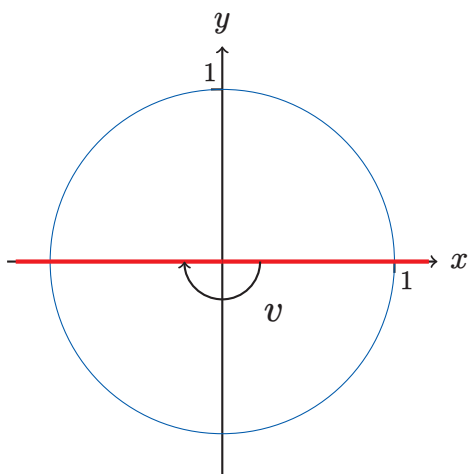


b)



6.1.4

a)



6.1.5

- a) $R_v = (0, 1)$
- b) $R_v = (-1, 0)$
- c) $R_v = (0, -1)$
- d) $R_v = (1, 0)$
- e) $R_v = (0, -1)$

6.1.6

- a) $v = \frac{\pi}{2}$
- b) $v = \pi$
- c) $v = 0$.
- d) $v = -\frac{\pi}{4}$.

6.1.7

- a) $(0, 1)$
- b) $(-1, 0)$
- c) $(0, 1)$.
- d) ca. $(-0,4; -0,9)$.

6.1.8

- a) Sådan her.

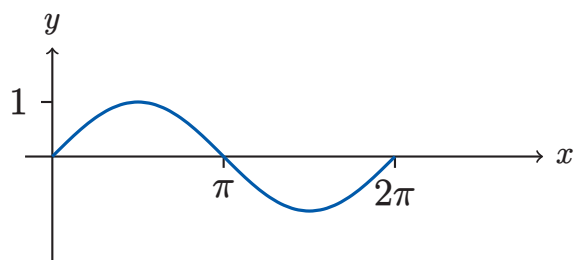
x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

6.2.1

- a) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ og $\tan(\pi) = 0$
- b) $\cos(-2\pi) = 1$, $\sin(-2\pi) = 0$ og $\tan(-2\pi) = 0$
- c) $\cos(135^\circ) = -0,7$, $\sin(135^\circ) = 0,7$ og $\tan(135^\circ) = -1$
- d) $\cos(-2) = -0,4$, $\sin(-2) = -0,9$ og $\tan(-2) = 2,2$
- e) $\cos(90^\circ) = 0$, $\sin(90^\circ) = 1$ og tangens er ikke defineret.

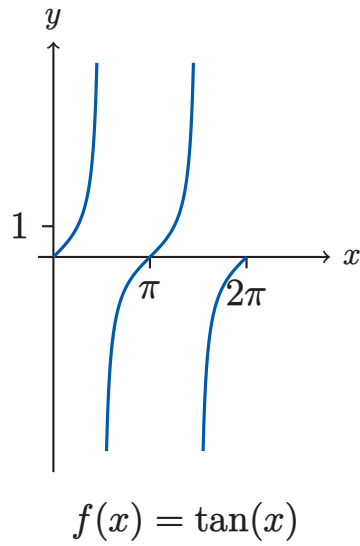
6.2.2

a)



$$f(x) = \sin(x)$$

b)



6.2.3

- a) Perioden for sinus er 2π
- b) Perioden for tangens er π .

6.3.1

- a) $\cos(45^\circ) = 0,71$
- b) $\sin(90^\circ) = 1$
- c) $\sin(90) = 0,89$
- d) $\tan(-2) = 2,19$

6.3.2

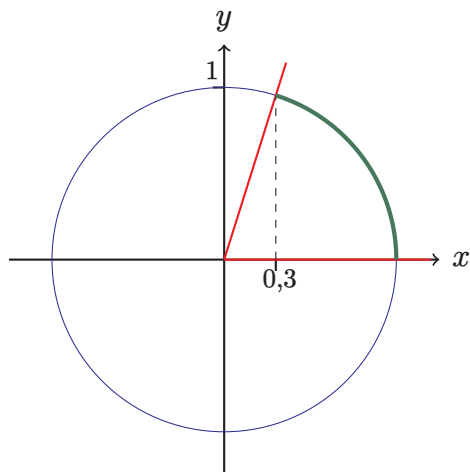
- a) Definitionsmængde: $[0; 20[$
- b) Værdimængde: $[-2; 6]$
- c) Nulpunkter: $x = 6,76$, $x = 10,95$ og $x = 19,33$
- d) Fortegnsvariation:
 - f er positiv i $]0; 6,76[\cup]10,95; 19,33[$
 - f er negativ i $]6,76; 10,95[$
 - f er nul i $x = 6,76$, $x = 10,95$ og $x = 19,33$
- e) Monotoniforhold:
 - f er voksende i $[0; 2,58]$ og $[8,86; 15,14]$
 - f er aftagende i $[2,58; 8,86]$ og $[15,14; 20[$
- f) Ekstrema:
 - f har globalt maksimum i $x = 2,58$ og $x = 15,14$ med maksimumsværdi 6.
 - f har lokalt minimum i $x = 0$ med minimumsværdi 3,12.
 - f har global minimum i $x = 8,86$ med minimumsværdi -2 .
- g) Krumningsforhold:
 - f er konkav i $[0; 5,72]$ og $[12; 18,28]$
 - f er konveks i $[5,72; 12,18]$ og $[18,28; 20[$
- h) Vendetangenter:
 - $y = -2x + 13,43$

$$y = 2x - 22$$

$$y = -2x + 38,57$$

6.3.3

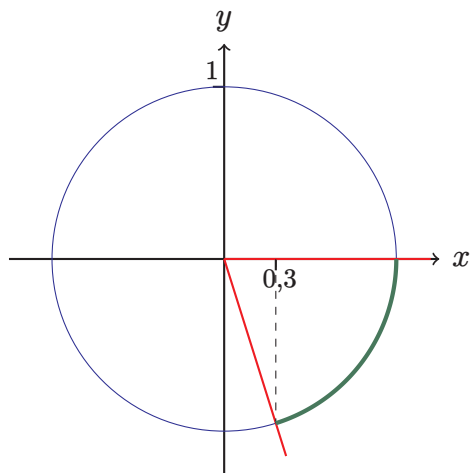
a) Løsningen er længden af det grønne stykke:



b) $x = 1,3$

c) $x = 1,27$

d) Løsningen er længden af det grønne stykke MEN, med negativt fortegn:

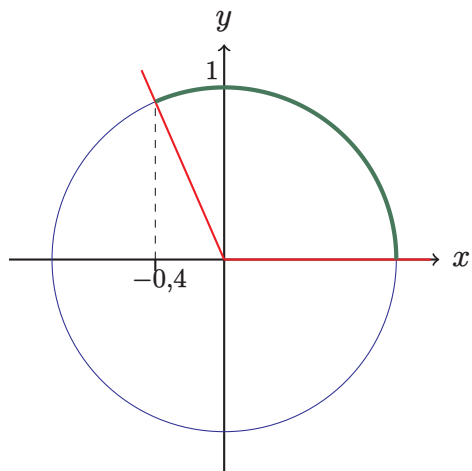


Løsningen er $x = -1,27$

e) $x = 1,27 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -1,27 + p \cdot 2\pi$

6.3.4

a) Løsningen er længden af det grønne stykke:

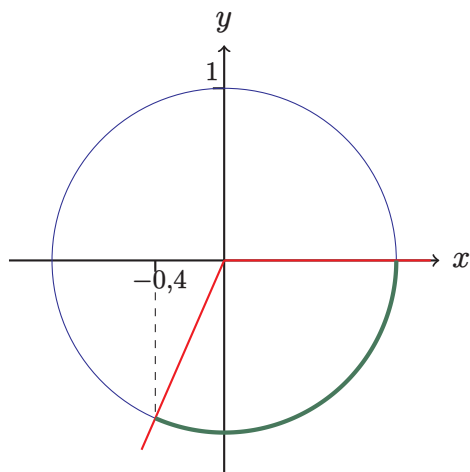


b) $x = 2$

c) $x = 1,98$

d) Løsningen er længden af det grønne stykke, MEN med negativt

fortegn:

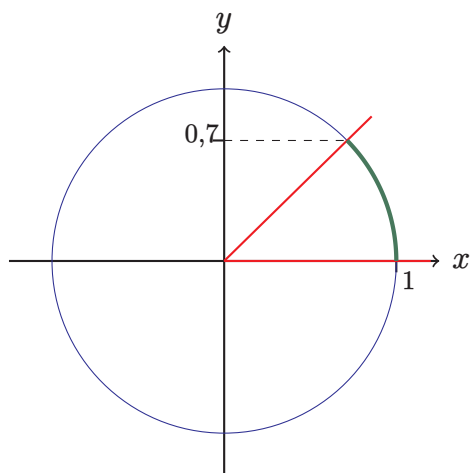


Løsningen er $x = -1,98$

e) $x = 1,98 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -1,98 + p \cdot 2\pi$

6.3.5

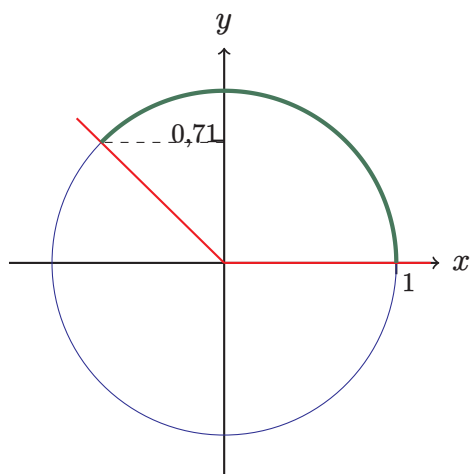
a) Løsningen er længden af det grønne stykke:



b) $x = 0,8$

c) $x = 0,78$

d) Løsningen er længden af det grønne stykke:



Løsningen er $x = 2,37$

e) $x = 0,78 + p \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = 2,37 + p \cdot 2\pi$

6.3.6

a) $x = -0,64 + p \cdot 2\pi \vee x = 0,64 + p \cdot 2\pi$

b) $x = -1,98 + p \cdot 2\pi \vee x = 1,98 + p \cdot 2\pi$

c) $x = 0,64 + p \cdot 2\pi \vee x = 2,50 + p \cdot 2\pi$

d) $L = \emptyset$

e) $x = 1,11 + p \cdot \pi$

6.3.7

a) $x_1 = -1,02$ og $x_2 = 0,02$

6.3.8

- a) $f'(x) = -\sin(x)$
- b) $f'(x) = \cos(x)$
- c) $f'(x) = \cos(x) \cdot x + \sin(x)$
- d) $f'(x) = -10 \sin(2x - 1)$

6.3.9

- a) Se øvelse 6.3.2

6.5.1

- a) $a = 6,76$
- b) Den modstående katete er 1,81 og den sidste vinklen er 75°

6.5.2

- a) $v = 53,13^\circ$
- b) Den sidste vinkel er $36,87^\circ$ og hypotenusen er 5

6.5.3

- a) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$ (der er ikke nogle tal som man ikke kan sætte ind i forskriften)
- b) $\text{Vm}(f) = [-7; 7]$

6.5.4

a) $a = 2$

b) $T = \frac{\pi}{2}$

c) $b = 4$

6.5.5

- a) Betragt et vilkårligt tidsrum Δt . Frekvensen angiver antallet af svingninger på et sekund, så den må være givet ved

$$f = \frac{\text{Antal svingninger i løbet af } \Delta t}{\Delta t}$$

Hvis nu vælger $\Delta t = T$ får vi

$$f = \frac{\text{Antal svingninger på en periode}}{T}$$

men på en periode er der pr. definition 1 svingning, så

$$f = \frac{1}{T}$$

6.5.6

- a) Frekvensen f kan regnes ud fra perioden T med formlen:

$$f = \frac{1}{T}$$

Perioden kan regnes ud fra vinkelfrekvensen ved $T = \frac{2\pi}{b}$, så det kan vi indsætte i stedet for perioden:

$$f = \frac{1}{\frac{2\pi}{b}}$$

Vi forlænger den store brøk med b :

$$f = \frac{b}{2\pi}$$

6.5.7

- a) $a = 3$
- b) $T = 4\pi$
- c) $b = 0,5$
- d) $c = -\frac{\pi}{2}$

6.5.8

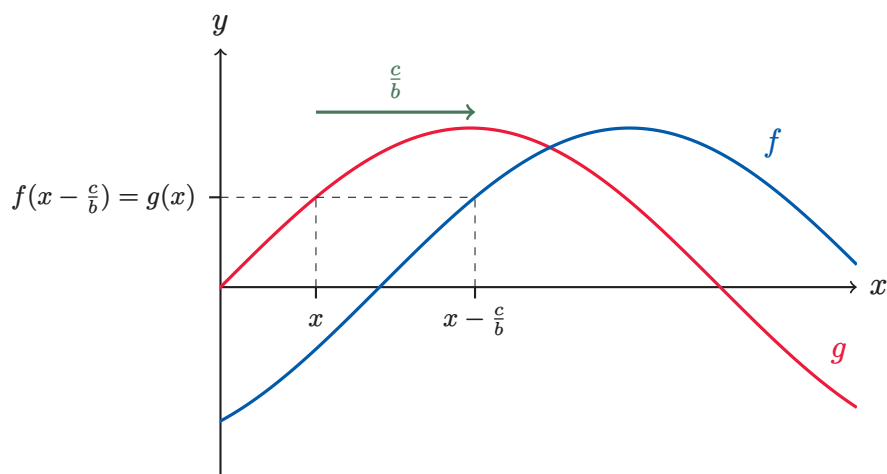
- a) Grafen forskydes med d langs y -aksen. Er d positiv forskydes grafen op, ellers forskydes den ned.
- b) $d = 1$
- c) $T = 8\pi$
- d) $a = 3, b = 0,25, c = 0,75\pi$
- e) $f = \frac{1}{8\pi}$

6.5.9

- a) Vis mig det.
- b) Vis mig det.

6.5.10

a) Sådan her f.eks:



7.1.1

a) 4

7.1.2

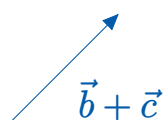
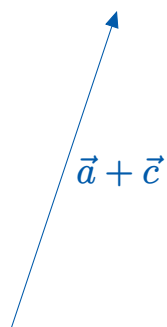
a)

$$\vec{a} + \vec{b}$$

A blue arrow pointing to the left, representing the vector sum $\vec{a} + \vec{b}$.

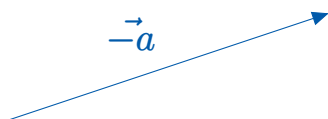
b)

c)



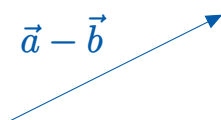
7.1.3

a)

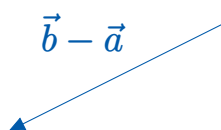


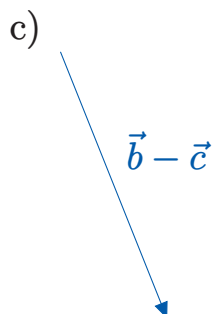
7.1.4

a)



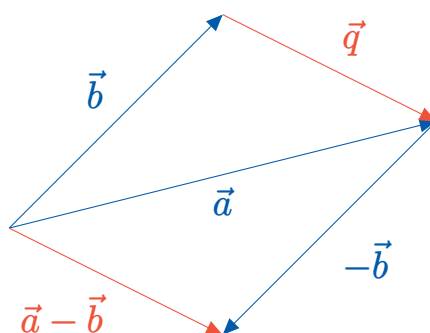
b)





7.1.5

a) Betragt figuren:

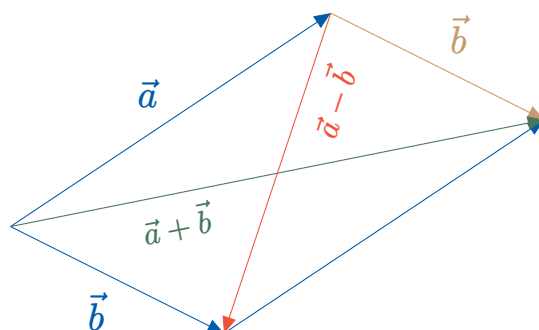


Jeg har placeret $\vec{a} - \vec{b}$ som vi pr. definition konstruerer den. Da $\vec{b}$ og $-\vec{b}$ er parallelle og lige lange er figuren et parallelogram. Det følger at de to røde vektorer peger i samme retning og er lige lange, og derfor er $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

7.1.6

- a) Vi har allerede (øvelse 7.1.5) gjort rede for at $\vec{a} - \vec{b}$ ligger som den røde vektor.

Da figuren er et parallelogram må $\vec{b}$ også ligge som vist her med brun:



Nu ligger $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$ og derfor må den grønne vektor være $\vec{a} + \vec{b}$.

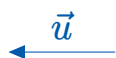
7.1.7

- a)



7.1.8

- a) $\vec{u} = -\vec{a}$



- b) $\vec{v} = \vec{0}$



- c) $\vec{w} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

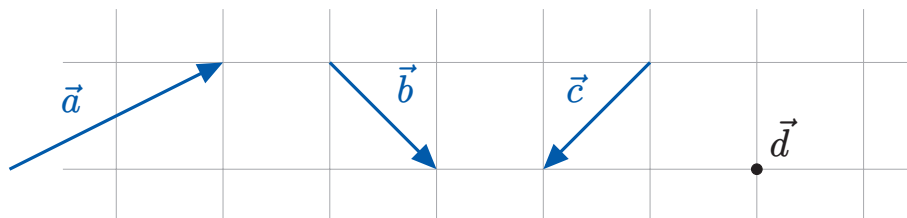


7.1.9

- a) En vektor er et objekt med en længde og en retning. Man tegner vektorer som pile.
- b) Nulvektoren er en vektor med længde på nul. Den tegnes som en prik.
- c) En egentlig vektor er en vektor som ikke er nulvektoren, dvs. den en længde der er større end nul.
- d) En repræsentant for en vektor er det vi får, når vi tegner vektoren et vilkårligt sted i et koordinatsystem. Vi kan lægge den alle steder, og derfor er der uendelige mange repræsentanter for en givet vektor.

7.2.1

a)



7.2.2

$$\text{a) } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7.2.3

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7.2.4

$$\text{a) } \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 5$$

7.2.5

$$\text{a) } a_2 = 12$$

7.2.6

- a) $|\vec{a}| = 1$
- b) $|\vec{b}| = \sqrt{5}$
- c) $|\vec{c}| = 2$

7.3.1

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

7.3.2

- a) $a_1 = -4$

7.3.3

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$
- b) $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a}) = 3(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

7.3.4

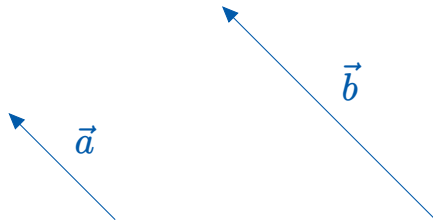
- a)

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

7.3.5

F.eks.

a)



b)



c)



d)



7.3.6

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

7.3.7

a) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $78,46^\circ$

7.3.8

a) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $109,44^\circ$

7.3.9

a) Du viser mig løsningen

7.3.10

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_a| = 10 \cdot 4 = 40.$

7.3.11

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}_a| \approx -2,6 \cdot 5,4 \approx -14.$

7.4.1

a) $\hat{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

7.4.2

a)

$$\begin{aligned}\hat{b} \cdot \vec{a} &= \widehat{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= -b_2 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2\end{aligned}$$

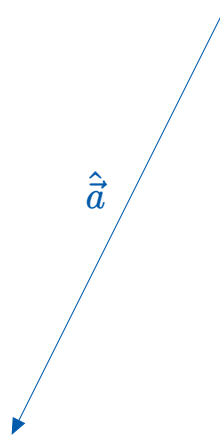
og

$$\begin{aligned}
 -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} &= -\widehat{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= -\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= -(-a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \\
 &= a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2
 \end{aligned}$$

Vi ser at de to resultater er ens og vi konkluderer at $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} = -\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.

7.4.3

a)



7.4.4

a) $A = 1$

7.4.5

a) $A = \frac{1}{2}$

7.4.6

a) Du viser mig det.

7.5.1

a) Vi skal vise at $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}(t\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \left(t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= ta_1b_1 + ta_2b_2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}t(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= t \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= t(a_1b_1 + a_2b_2) \\ &= ta_1b_1 + ta_2b_2\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens.

7.5.2

a) Vi skal vise at $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens.

7.5.3

a) Vis skal vise at $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 a_1 + a_2 a_2 \\ &= a_1^2 + a_2^2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens og alt er godt.

9.1.1

- a) En eksponentiel funktion har forskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Altså der byttet rundt på x og a .

9.1.2

- a) Potensfunktion, $a = 5$ og $b = 2$.
- b) Potensfunktion, $a = 3$ og $b = 1$.
- c) Ikke en potensfunktion.
- d) Potensfunktion, $a = 1$ og $b = 1$
- e) Ikke en potensfunktion.
- f) Ikke en potensfunktion.
- g) Potensfunktion, $a = 0$ og $b = 4$

h) Potensfunktion med $a = \frac{2}{3}$ og $b = 1$

i) Potensfunktion med $a = -4$ og $b = 7$

9.1.3

a) Lineære funktioner $f(x) = ax + b$, hvor $a > 0$ og $b = 0$.

b) Polynomier, hvor koefficienten til højstegradsleddet er positiv og resten af koefficienterne er nul.

c) Alle positive konstante funktioner.

9.1.4

a) $0 < a < 1$

b) $b = 3$

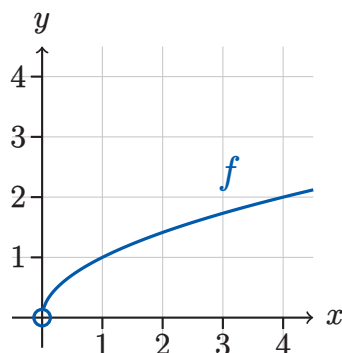
9.1.5

a) $\text{Dm}(f) =]0; \infty[$ og $\text{Vm}(f) =]0; \infty[$

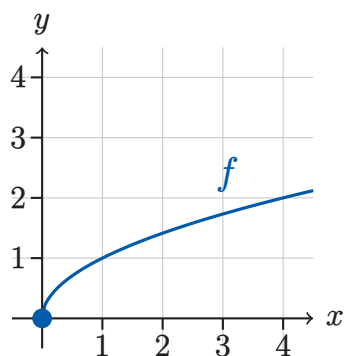
b) $\text{Dm}(f) =]0; \infty[$ og $\text{Vm}(f) = b$

9.1.6

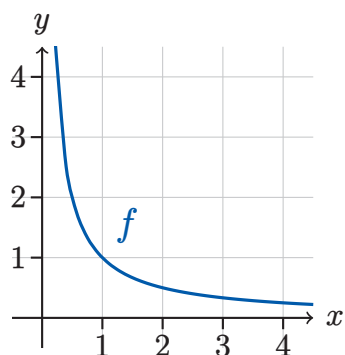
a) Opfattet som potensfunktion:



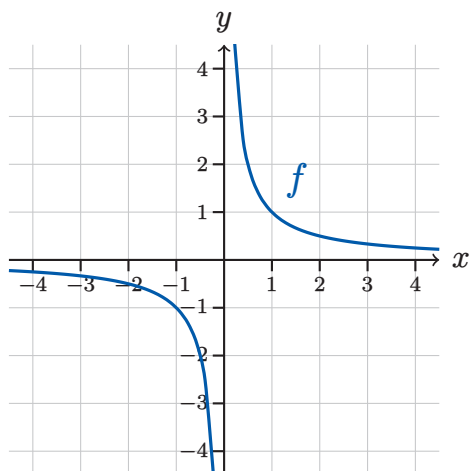
Ikke opfattet som potensfunktion:



b) Opfattet som potensfunktion:



Ikke opfattet som potensfunktion:



Denne graf kaldes også for en hyperbel.

9.1.7

a) $x = 3,05$

b) $x = 4,35$

9.1.8

a) $f(x) = 3x^2$

9.1.9

a) $a = 0,66$, $b = 0,085$

b) 1,89 kg.

c) 70 kg.

9.2.1

a) Selvfølgelig har jeg ret.

b) Ja

c) Nej, men y -værdierne ville så bare få en anden fast procentvis vækst.

9.2.2

a) 10%

b) 100%

c) $f(120) = 242$

9.2.3

- a) $n(x) = 267793x^{-0,766}$
- b) ca. 157.000 (modellen giver 157.421)
- c) De tjente over \$1,5 mio. (modellen giver 1470434).

9.2.4

a)

	y -vækst: fast værdi	y -vækst: fast procent
x -vækst: fast værdi	Lineær	Eksponentiel
x -vækst: fast procent	Logaritmisk	Potens

9.3.1

- a) Vi starter med at vise at f går igennem punktet $(1, b)$. Det er nemt. Vi regner bare funktionsværdien i $x = 1$: $f(1) = b \cdot 1^a = b$. Altså går grafen igennem punktet $(1, b)$.

Vi vil nu vise vækstegenskaben. Vi vælger et vilkårligt x_0 . Lader vi x_0 vokse med $r \cdot 100\%$, bliver x_0 til $x_0 \cdot (1+r)$. Vi regner nu den procentvise vækst (som decimaltal) i y -værdierne:

$$\frac{\text{ny} - \text{gammel}}{\text{gammel}}$$

Vi skal finde væksten fra $f(x_0)$ til $f(x_0 \cdot (1+r))$, så vi skal regne

$$\frac{f(x_0 \cdot (1+r)) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

Vi indsætter forskriften:

$$\frac{b \cdot (x_0 \cdot (1+r))^a - b \cdot x_0^a}{b \cdot x_0^a}$$

og forkorter med b :

$$\frac{(x_0 \cdot (1 + r))^a - x_0^a}{x_0^a}$$

Vi bruger potensregnereglen $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$:

$$\frac{x_0^a \cdot (1 + r)^a - x_0^a}{x_0^a}$$

og forkorter med x_0^a :

$$((1 + r)^a - 1)$$

Altså er den procentvise vækst $((1 + r)^a - 1) \cdot 100\%$, hvilket var det vi gerne ville vise.

9.3.2

- a) Øv - intet facit. Vis det til din lærer og han/hun bliver imponeret. Det gør jeg i hvert fald.

10.1.1

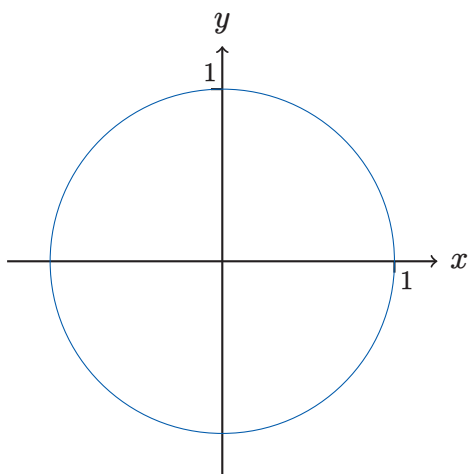
- a) Det er en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius $r = 1$.

10.1.2

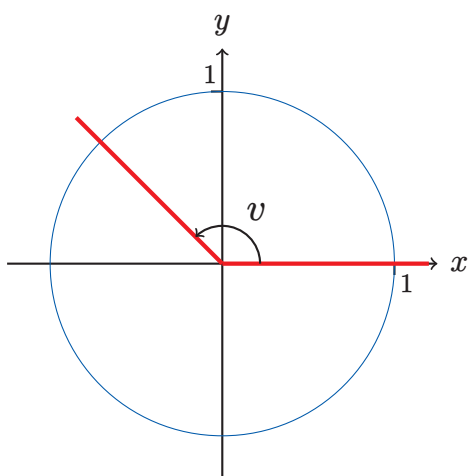
- a) Vi ved at omkredsen af en cirkel er bestemt ved formlen $O = 2\pi r$ og da radius i enhedscirklen er 1, må enhedscirkles omkreds være $O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

10.1.3

a)

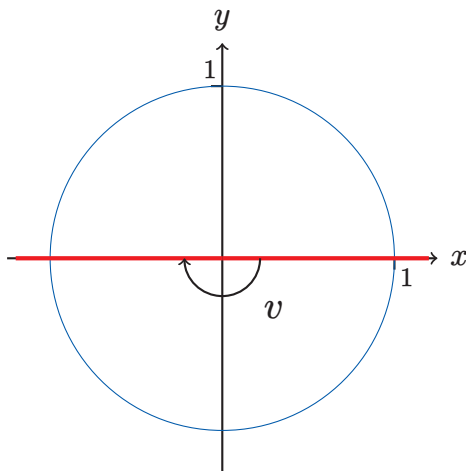


b)



10.1.4

a)



10.1.5

- a) $R_v = (0, 1)$
- b) $R_v = (-1, 0)$
- c) $R_v = (0, -1)$
- d) $R_v = (1, 0)$
- e) $R_v = (0, -1)$

10.1.6

a) $v = \frac{\pi}{2}$

b) $v = \pi$

c) $v = 0$.

d) $v = -\frac{\pi}{4}$.

10.1.7

a) $(0, 1)$

b) $(-1, 0)$

c) $(0, 1)$.

d) ca. $(-0,4; -0,9)$.

10.1.8

a) Sådan her.

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

10.1.9

a) Der går ca. 57° på en radian.

b) Der går ca. 0,017 radianer på en grad.

10.1.10

a) $x = \frac{\pi \cdot v}{180^\circ}$

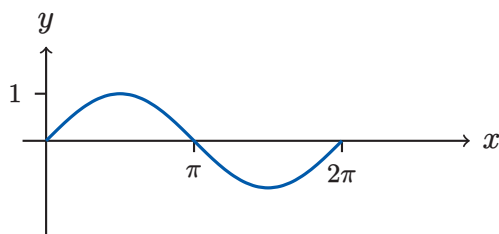
b) $v = \frac{180^\circ \cdot x}{\pi}$

10.2.1

- a) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ og $\tan(\pi) = 0$
- b) $\cos(-2\pi) = 1$, $\sin(-2\pi) = 0$ og $\tan(-2\pi) = 0$
- c) $\cos(135^\circ) \approx -0,7$, $\sin(135^\circ) \approx 0,7$ og $\tan(135^\circ) \approx -1$
- d) $\cos(-2) \approx -0,4$, $\sin(-2) \approx -0,9$ og $\tan(-2) \approx 2,2$
- e) $\cos(90^\circ) = 0$, $\sin(90^\circ) = 1$ og tangens er ikke defineret (hvorfor?).

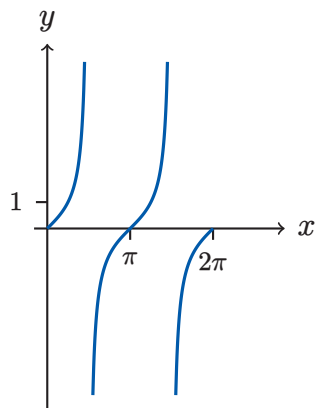
10.2.2

a)



$$f(x) = \sin(x)$$

b)



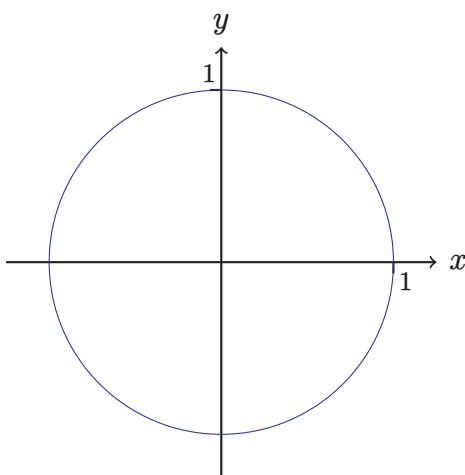
$$f(x) = \tan(x)$$

10.2.3

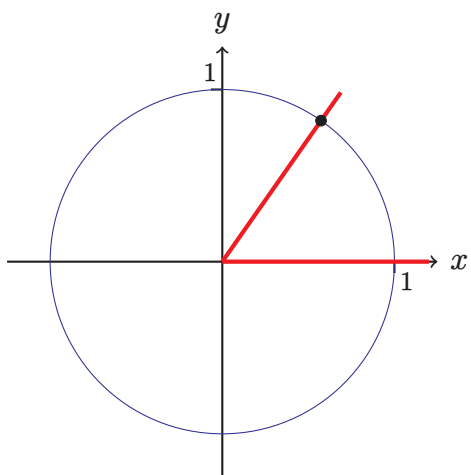
- a) Perioden for sinus er 2π
- b) Perioden for tangens er π .

10.2.4

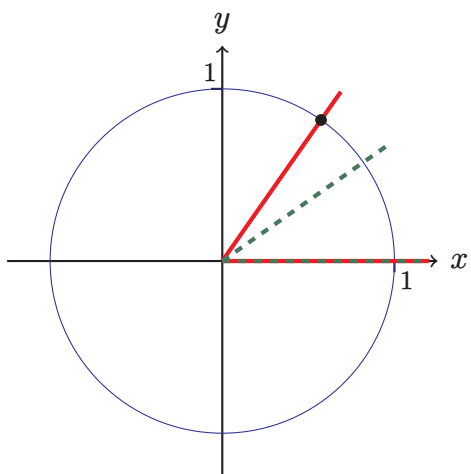
- a)



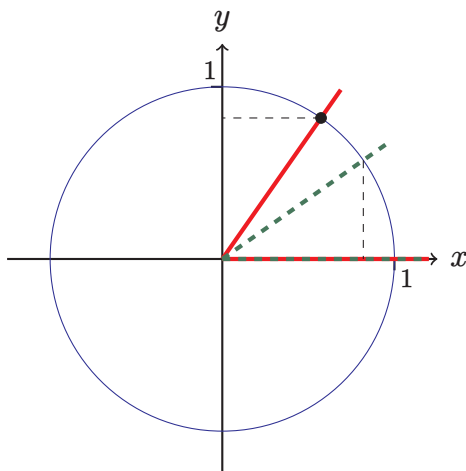
b)



c)



d)



e) De er begge ca. 08. Det fremgår af symmetrien i tegningen at de er ens.

10.2.5

a) $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10.3.1

a) $a \approx 1,5$

10.3.2

a) $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$ (der er ikke nogle tal som man ikke kan sætte ind i forskriften)

b) $\text{Vm}(f) = [-7; 7]$

10.3.3

a) Perioden er 4π

10.3.4

a) Vi ganger først med b på begge sider:

$$bT = b \frac{2\pi}{b}$$

Vi reducerer højresiden:

$$bT = 2\pi$$

og deler med T på begge sider:

$$b = \frac{2\pi}{T}$$

10.3.5

a) Vinkelfrekvensen er $b = \frac{1}{4}$.

10.3.6

a) Formlen $b = \frac{2\pi}{T}$ viser at T går b gange op i 2π . Hvert T svarer til en svingning, så der er altså b svingninger på 2π .

10.3.7

a) $a \approx 2$

b) $T \approx \frac{\pi}{2}$

c) $b \approx 4$

d) $b \approx 4$

10.3.8

- a) Betragt et vilkårligt tidsrum Δt . Frekvensen angiver antallet af svingninger på et sekund, så den må være givet ved

$$f = \frac{\text{Antal svingninger i løbet af } \Delta t}{\Delta t}$$

Hvis nu vælger $\Delta t = T$ får vi

$$f = \frac{\text{Antal svingninger på en periode}}{T}$$

men på en periode er der pr. definition 1 svingning, så

$$f = \frac{1}{T}$$

10.3.9

- a) Frekvensen f kan regnes ud fra perioden T med formlen:

$$f = \frac{1}{T}$$

Perioden kan regnes ud fra vinkelfrekvensen ved $T = \frac{2\pi}{b}$, så det kan vi indsætte i stedet for perioden:

$$f = \frac{1}{\frac{2\pi}{b}}$$

Vi forlænger den store brøk med b :

$$f = \frac{b}{2\pi}$$

10.3.10

- a) $a = 3$
- b) $T = 4\pi$
- c) $b = 0,5$
- d) $c = -\frac{\pi}{2}$

10.3.11

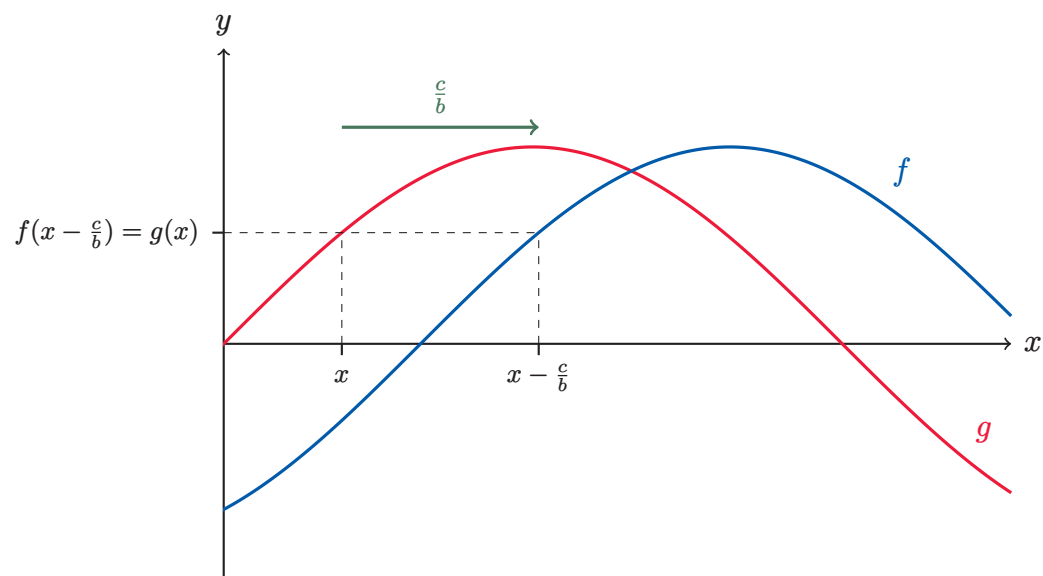
- a) Grafen for cosinus fremkommer ved en forskydning af grafen for sinus med $\frac{\pi}{2}$ til venstre
- b) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

10.3.12

- a) Grafen forskydes med d langs y -aksen. Er d positiv, forskydes grafen op, ellers forskydes den ned.
- b) $d = 1$
- c) $T = 8\pi$
- d) $a = 3, b = 0.25, c = 0,75\pi$
- e) $f = \frac{1}{8\pi}$

10.4.1

a) Sådan her f.eks:

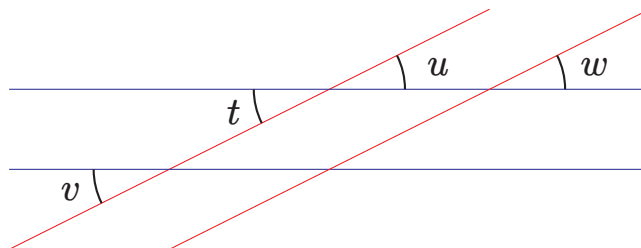


11.1.1

- a) Vinklerne v og u er ensliggende og vinklerne w og s er ensliggende.
- b) Vinklerne r og s er topvinkler og vinklerne u og t er topvinkler.
- c) Ingen af dem haha.
- d) $(v, w), (r, u), (u, s), (s, t), (t, r)$ — altså 5 sæt.
- e) Vinklerne v , u og t er ens. Vinklerne w , r og s er ens.

11.1.2

- a) Vi indtegner to nye vinkler u og t



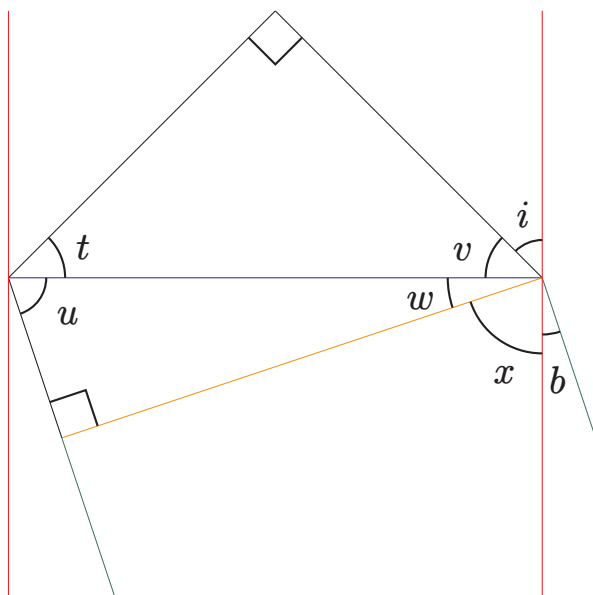
Vi ser at $t = v$ da de er ensliggende. Da t og u er topvinkler er $t = u$. Altså er $v = u$. Da u og w er ensliggende er $u = w$. Vi konkluderer at $v = w$.

11.1.3

- a) $C = 130^\circ$
b) C er stump.

11.1.4

- a) Da den røde linje står vinkelret på den blå, må i og v være komplementvinkler. Dvs. $i + v = 90^\circ$, så $v = 90^\circ - i$.
b) Betragt vinklen x til højre i figuren:

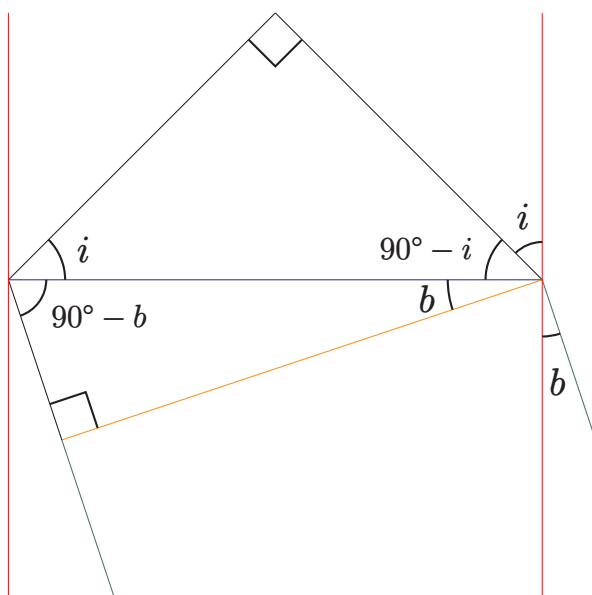


Vinklen må være komplementvinkel til b , da det orange linjestykke står vinkelret på det grønne. Men x må også være komplementvinkel til w , da det røde linjestykke står vinkelret på det blå. Derfor gælder

$$x + b = 90^\circ \quad \text{og} \quad x + w = 90^\circ$$

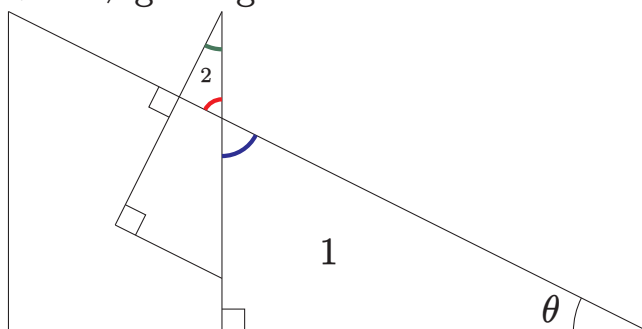
Så $x + b = x + w$ og derfor må $w = b$.

- c) $u = 90^\circ - b$, da vinkelsummen i trekanten er 180° og $w = b$.
- d) $t = i$, da vinkelsummen i trekanten er 180° og $v = 90^\circ - i$.
- e)



11.1.5

a) Vi tilføjer nogle vinkler:



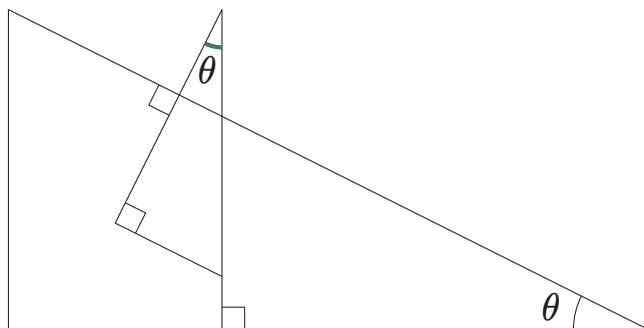
Den blå vinkel må være $90^\circ - \theta$, da vinkelsummen i trekant 1 skal være 180° .

Den røde vinkel må være $90^\circ - \theta$, da den er topvinkel til den blå.

Den grønne vinkel må være θ , da vinkelsummen i trekant 2 skal være 180° og den røde vinkel er $90^\circ - \theta$ (og den sidste

vinkel er 90° , da den er topvinkel til den rette vinkel overfor).

Altså:



11.1.6

- a) Øje til lineal: $60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$
månens radius: $1737,4 \text{ km} = 1\,737\,400 \text{ m}$
månen på lineal: $5,4 \text{ mm} = 0,0054 \text{ m}$
- b) Det er reglen om ensvinklede trekanter.
- c) Afstanden er omkring $380,000 \text{ km}$. Hvis du har fået det halve er det måske fordi du har glemt at det er diameteren og ikke radius som udgør den ene side i den store trekant.

11.2.1

- a) $\sin(60^\circ) = 0,87$
- b) $v = 44,4^\circ$

11.2.2

- a) $a = 6,76$
- b) Den modstående katete er $1,81$ og den sidste vinklen er 75°

11.2.3

- a) $v = 53,13^\circ$
- b) Den sidste vinkel er $36,87^\circ$ og hypotenusen er 5

11.2.4

- a) Trekant ABD er retvinklet så vi kan regne $\sin(i) = \frac{BD}{AD}$. Ved at gange med AD på begge sider fås det ønskede resultat.
- b) Fås på tilsvarende måde som a) men bare ved at kigge på trekant ACD .
- c) Vi bruger resultaterne i a) og b):

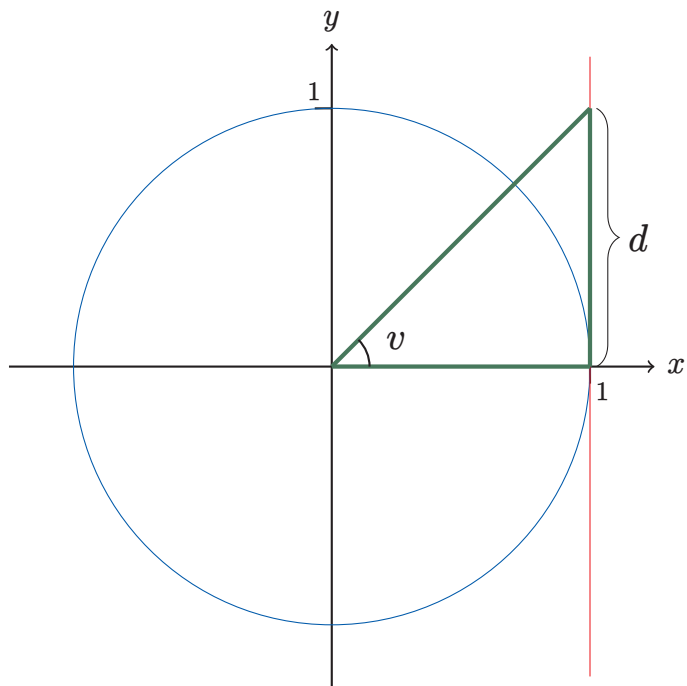
$$\frac{BD}{AC} = \frac{AD \cdot \sin(i)}{AD \cdot \sin(b)} = \frac{\sin(i)}{\sin(b)}$$

11.2.5

- a) I den farvede retvinklede trekant gælder $\sin(\theta) = \frac{F_1}{F}$. Ved at gange med F på begge sider fås det ønskede resultat.
- b) I den farvede retvinklede trekant gælder $\cos(\theta) = \frac{F_2}{F}$. Ved at gange med F på begge sider fås det ønskede resultat.

11.2.6

- a) Betragt den grønne trekant:



Vi bruger formlen

$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

på vinklen v og den grønne trekant. Det giver:

$$\tan(v) = \frac{d}{1}$$

Dvs.

$$d = \tan(v)$$

11.2.7

- a) Spørg mig, hvis du er i tvivl.

11.3.1

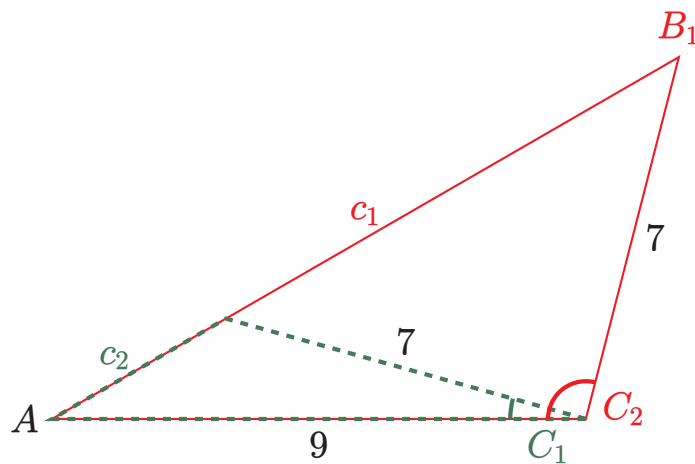
- a) $B = 34,13^\circ$
- b) Ja, man udnytte at vinkelsummen i trekanten er 180° .

11.3.2

- a) $A = 41,41^\circ$
- b) $B = 55,77^\circ$
- c) $C = 82,82^\circ$

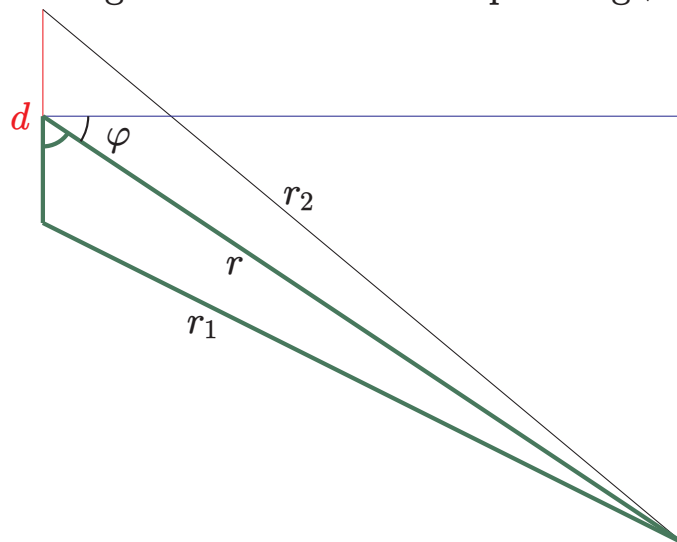
11.3.3

- a) $c_1 = 13,56$ eller $c_2 = 3,76$.
- b) Den ene trekant har $B_1 = 45,59$ og $C_1 = 104,42$. Den anden har $B_2 = 134,42$ og $C_2 = 15,59$.
- c)



11.3.4

a) Vi bruger cosinusrelationerne på den grønne trekant:



Den grønne vinkel må være $90^\circ - \varphi$, da den er komplementvinkel til φ

- b) $(r_1)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - d \cdot r \cdot \sin(\varphi)$
- c) Gøres på tilsvarende måde som i spørgsmål a), bare ved at betragte trekanten udspændt af r og r_2 .
- d) $(r_2)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 + d \cdot r \cdot \sin(\varphi)$
- e) $(r_2)^2 - (r_1)^2 = 2 \cdot d \cdot r \cdot \sin(\varphi)$
- f) Følger af kvadratsætning $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Hvis du ikke kan genkende den så søg på "kvadratsætninger" i mathhx-bogen.
- g) Hvis den blå linje er meget længere end den røde må forskellen mellem r_1 og r_2 være meget lille sammenlignet med størrelsen på r_1 og r_2 . Så når man lægger dem sammen, så gør det ikke

den store forskel om man skriver r_1 , r_2 eller r_3 . Derfor kan vi skrive $2r$ i stedet for $r_1 + r_2$ udtrykket

$$(r_2)^2 - (r_1)^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

- h) I delspørgsmål e) har du vist at $(r_2)^2 - (r_1)^2 = 2 \cdot d \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.
I delspørgsmål g) har du vist at $(r_2)^2 - (r_1)^2 \approx 2r(r_2 - r_1)$, når den blå linje er meget længere end den røde. Kombiner de to og du får det ønskede.
- i) Vi deler med $2r$ på begge sider af lighedstegnet.

11.3.5

- a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$
b) $c^2 = a^2 + b^2$
c) Pythagoras' læresætning.

11.3.6

- a) Spørg mig.

11.3.7

- a) 125,25
b) $c = 7,16$

11.3.8

- a) $a = 20,67$ og $b = 27,85$

11.3.9

- a) $\sin(B) = 0,7142857143$
- b) $B = 45,5846914028$
- c) $B_2 = 134,42$
- d) $c_1 = 13,56, c_2 = 3,76, C_1 = 104,42, C_2 = 15,59.$

11.4.1

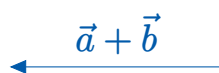
- a) Vis mig det.
- b) Vis mig det.

12.1.1

- a) 4

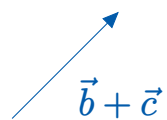
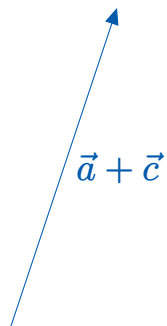
12.1.2

- a)



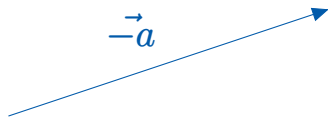
- b)

c)



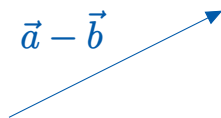
12.1.3

a)

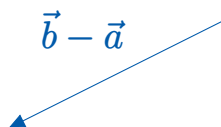


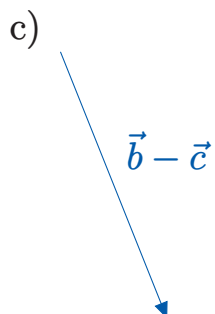
12.1.4

a)



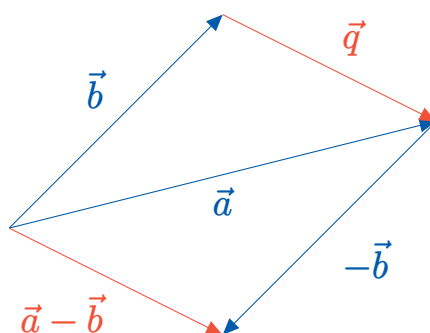
b)





12.1.5

a) Betragt figuren:

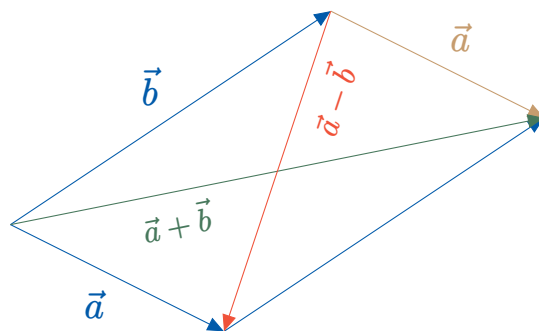


Jeg har placeret $\vec{a} - \vec{b}$ som vi pr. definition konstruerer den. Da $\vec{b}$ og $-\vec{b}$ er parallelle og lige lange er figuren et parallelogram. Det følger at de to røde vektorer peger i samme retning og er lige lange, og derfor er $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

12.1.6

- a) Vi har allerede (øvelse 12.1.5) gjort rede for at $\vec{a} - \vec{b}$ ligger som den røde vektor.

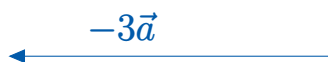
Da figuren er et parallelogram må $\vec{b}$ også ligge som vist her med brun:



Nu ligger $\vec{b}$ i forlængelse af $\vec{a}$ og derfor må den grønne vektor være $\vec{a} + \vec{b}$.

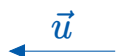
12.1.7

- a)



12.1.8

- a) $\vec{u} = -\vec{a}$



- b) $\vec{v} = \vec{0}$



- c) $\vec{w} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

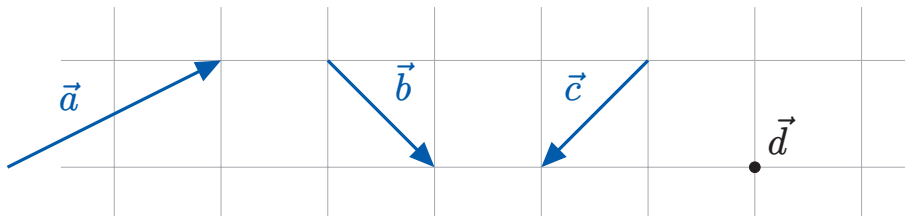


12.1.9

- a) En vektor er et objekt med en længde og en retning. Man tegner vektorer som pile.
- b) Nulvektoren er en vektor med længde på nul. Den tegnes som en prik.
- c) En egentlig vektor er en vektor som ikke er nulvektoren, dvs. den en længde der er større end nul.
- d) En repræsentant for en vektor er det vi får, når vi tegner vektoren et vilkårligt sted i et koordinatsystem. Vi kan lægge den alle steder, og derfor er der uendelige mange repræsentanter for en givet vektor.

12.2.1

a)



12.2.2

- a) Vis det til mig...

12.2.3

$$\text{a) } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

12.2.4

$$\text{a) } \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 5$$

12.2.5

$$\text{a) } a_2 = 12$$

12.2.6

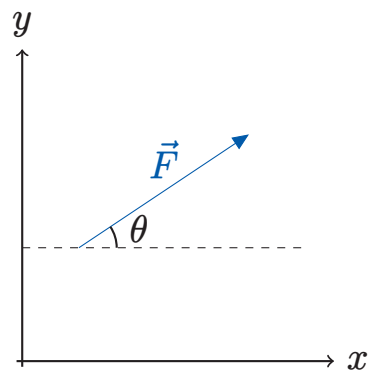
$$\text{a) } |\vec{a}| = 1$$

$$\text{b) } |\vec{b}| = \sqrt{5}$$

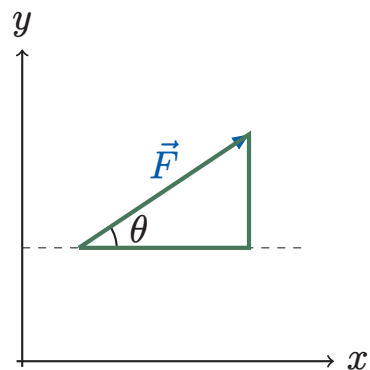
$$\text{c) } |\vec{c}| = 2$$

12.2.7

- a) Den stiplede linje er parallel med x -aksen



- b)



- c) Koordinaterne for $\vec{F}$ udgør trekantens kateter.
d) $\theta = 33,69^\circ$

12.2.8

- a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

12.2.9

- a) Se øvelse 11.1.5
- b) Se f.eks. eksempel 11.1.1
- c) Brug reglen om cosinus i en retvinklet trekant på den brune vinkel.
- d) Brug reglen om sinus i en retvinklet trekant på den røde vinkel.

12.3.1

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

12.3.2

a) $a_1 = -4$

12.3.3

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$
- b) $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a}) = 3(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

12.3.4

a)

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

12.3.5

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

12.3.6

a) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $78,46^\circ$

12.3.7

a) Ud fra koordinaterne kan vi regne $\vec{a} \cdot \vec{b}$ samt $|\vec{a}|$ og $|\vec{b}|$. Vinklen kan så findes ved først at isolere $\cos(v)$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v)$ og så indsætte de fundne værdier.

b) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $109,44^\circ$

12.3.8

a) nulvektoren

b) $|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| = 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

d) ja

12.3.9

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| = 10 \cdot 4 = 40.$

12.3.10

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}_{\vec{a}}| \approx -2,6 \cdot 5,4 \approx -14.$

12.3.11

- a) $A = 20 \text{ J}$
- b) $A = 0$. Det passer med at klodsen ikke bevæger sig langs den akse hvor kræften virker, så kraften har ikke haft indflydelse på klodsens energi.
- c) $A = -20 \text{ J}$. Læg mærke til det er et negativt tal. Det er fordi at kraften modvirker bevægelsen og derfor trækker energi ud af klodsen i stedet for at give den energi.
- d) $A = 17,32 \text{ J}$

12.4.1

- a) Vi skal vise at $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}(t\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \left(t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= ta_1b_1 + ta_2b_2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}t(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= t \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= t(a_1b_1 + a_2b_2) \\ &= ta_1b_1 + ta_2b_2\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens.

12.4.2

a) Vi skal vise at $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens.

12.4.3

a) Vis skal vise at $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Venstre side:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 a_1 + a_2 a_2 \\ &= a_1^2 + a_2^2\end{aligned}$$

Højre side:

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2\end{aligned}$$

Vi ser at de to sider er ens og alt er godt.

Indeks

A

Amplitude	385
Amplitude (2017 ordning)	303
Analysis Toolpack	227
Arbitrær	11
Areal af parallelogram udspændt af to vektorer (2017-ordning)	344
Areal af trekant udspændt af to vek- torer (2017-ordning)	345
Areal mellem to grafer	39
GeoGebra	59
Areal under ikke-negativ funktion	29
Areal under ikke-negativ graf GeoGebra	56

B

Bestemt integral	14
GeoGebra	55
regneregler	16

C

Cirkel	
definition	194
ligning for	195
Cosinus	
Geogebra (2017 ordning)	283
i enhedscirklen	377
Cosinus (2017 ordning)	

ligninger med	286
som funktion	278
Cosinus som funktion	378
Cosinusrelationerne	471
Cosinusrelationerne (2017-ordning)	348

D

determinationskoefficient	
modelkontrol	245
Determinationskoefficienten	
beregning og fortolkning	260
Differentialligning	
GeoGebra	115
Differentialligning	80
fuldstændig løsning ved tabelop- slag	87, 89
tjek om funktion er løsning	81

E

Egentlig vektor (2017-ordning) ..	319
Ellipse	200
ligning for	201
Enhedscirkel	370
Estimeret lineær model	226

F

Faseforskydning	390
Faseforskydning (2017 ordning) ..	307
Fejlleddet	225
Frekvens	389
Frekvens (2017 ordning)	307
Frit ekstremum	186
beregning	208, 220
Fuldstændig løsning til differentiallig- ning	86
GeoGebra	116
H	
Halvakse	200
Harmonisk svingning	385
Harmonisk svingning (2017 ordning) 303	
I	
Indskudsreglen	16
Integralregning i GeoGebra	53
Integrand	11
Integrationskonstant	11
J	
Justeret determinationskoefficient	237
K	
Konfidensinterval	
hældning i lineær model	231
multipel regression	235
Korrelationsmatrix	242
Korrigeret model	235
Kriteriefunktion	
lineær programmering	129
Kvadratisk programmering	
når a og c har samme fortegn .	181
når $c = 0$	174
Kvadratkomplettering	188
Kvadratisk funktion i to variable ..	169

L	
Lineær model	
regressionsanalyse	224
Lineær programmering	
med hjørneinspektion	128
Lineær regression	
guide til regression med modelkon- trol	246
Linjelement	107
Logistisk vækst	
bestand af fisk	120
løsningsformel	87
Løsningskurve	105
M	
Mindste kvadraters metode	254
Modelkontrol	
multipel lineær regression	241
simpel lineær regression	238
Multipel lineær regression	233
Multipel regression	
guide til regression med modelkon- trol	246
N	
Negativ vinkel	
i enhedscirklen	371
Negativ vinkel (2017 ordning)	
i enhedscirklen	271
Niveaukurve	
kvadratisk programmering	171
kvadratisk programmering, bereg- ning	205
Niveaulinje	138
Nulvektor (2017-ordning)	319
O	
Outliers	
regressionsanalyse	244

Overgangsformler	396
Overgangsformler (2017 ordning)	295

P

Partielle afledede	248
Partikulær løsning til differentiallig- ning	86
Polygonområde	130
Potensfunktion	356
P-værdi	
multipel lineær regression	237

R

Radiantal	374
Radiantal (2017 ordning)	274
Repræsentant for vektor	442
Repræsentant for vektor (2017- ordning)	320
Residual	229
beregning i hånden	252
Residualanalyse	238
Residualplot	229
Retningsfelt	111
GeoGebra	119
Retningspunkt	373
Retningspunkt (2017 ordning) ...	273
Retvinklede trekanter (2017 ordning)	
beregning af sider og vinkler ..	299

S

Separation af de variable	
fuldstændig løsning	92
partikulær løsning	98
Seperation af de variable	
løsningsformel	87

Sinus

Geogebra (2017 ordning)	283
i enhedscirklen	377
ligninger med (2017 ordning) ..	286

som funktion	378
Sinus (2017 ordning)	
som funktion	278
Skalarprodukt	458
Skalarprodukt (2017-ordning) ...	334
Stamfunktion	5
gennem punkt	9
GeoGebra	53
Stationære punkter	249
Storakse	200
Substitutionsmetoden	
bestemt integration	25
ubestemt integration	21

T

Tangens	
Geogebra (2017 ordning)	283
i enhedscirklen	377
som funktion	378
Tangens (2017 ordning)	
ligninger med	286
som funktion	278
Trigonometriske funktioner	
Geogebra (2017 ordning)	283
Trigonometriske ligninger (2017 ord- ning)	286
Tværvektor (2017-ordning)	343

U

Ubestemt integral	11
GeoGebra	53
regneregler	13, 74

V

Vektor	
addition	443
definition	441
koordinater	450
længde	453

regneregler	448
subtraktion	445
Vektor (2017-ordning)	
addition	321
definition	319
koordinater	328
længde	332
mellem to punkter	330
regneregler	326
subtraktion	323
Vinkel	
i enhedscirklen	370
mellem to vektorer	461
Vinkel (2017 ordning)	
i enhedscirkle	271
Vinkel (2017-ordning)	
mellem to vektorer	336
Vinkelfrekvens	387
Vinkelfrekvens (2017 ordning) ...	304